

**Lectures:**

4.1.2022 Recapitulation. The ideal Fermi Gas and the  $T=0$  limit.

6.1.2022 The Sommerfeld expansion. Comparison of Bosonic and Fermionic systems.

**Book:** Schwabl 4.3

**Exercises:** Please hand in until Mo 10.1.2022, 8:00 (10 points each).

17a) Consider the two-dimensional Fermi Gas using the Grand Canonical Ensemble. Determine the density of states and the Fermi energy (for Fermions use  $g_s = 2$ ). Calculate the particle number as a function of fugacity. In this case the relation can be inverted analytically. Plot the chemical potential as a function of temperature at a given Fermi energy.

b) Determine first order correction for small densities to the ideal gas law in 2D.

18a) Compare the expressions for the critical Bose Einstein temperature and the Fermi temperature  $T_F = \varepsilon_F / k_B$  if the masses of the 3D particles are assumed to be the same (for Fermions use  $g_s = 2$ ). Which temperature is larger? What equation must be fulfilled for the temperature when  $\mu(T) = 0$  for three dimensional Fermions? Determine the numerical value of that temperature and compare to the Fermi temperature.

b) Consider  ${}^4\text{He}$  (Boson with spin  $s=0$  and mass  $m=4u$ ) and  ${}^3\text{He}$  (Fermion with spin  $s=1/2$  and mass  $m=3u$ ). Assume that they are densely packed in a liquid state at a distance of twice the atomic radius  $(V/N)^{1/3} \approx 2r = 256 \text{ pm}$ . Determine the theoretical values of the critical Bose-Einstein temperature and the Fermi temperature, respectively.

## Verständnisfragen

- 75.) Berechne die Energie und die spezifische Wärme in einem idealen Bose-Gas als Funktion der Temperatur bei gegebener Dichte (d.h. gegebener kritische Temperatur  $T_c$ ). Zeichne den ungefähren Verlauf der spezifischen Wärme  $C_V$  als Funktion von  $T$  eines bosonischen Gases.
- 76.) Argumentiere, dass in einem Bosegas für  $T < T_c$  der Druck proportional zu  $T^{5/2}$  ist.
- 77.) Wie ändert sich das großkanonische Ensemble falls innere Freiheitsgrade (z.B. Spin) berücksichtigt werden müssen? Was ist der Effekt für die Quantenstatistik und Virialentwicklung falls es entartete innere Freiheitsgrade gibt?
- 78.) Was sind die Ausdrücke für die Teilchenzahl und die Energie eines dreidimensionalen fermionischen Gases als Funktion der Fugazität?
- 79.) Was ist die Virialentwicklung für ein ideales Fermionengas bis zur 1. Ordnung?
- 80.) Wie ist die Fermi Energie  $\varepsilon_F$  definiert? Berechne den Druck und die Energie für ein ideales dreidimensionales Fermigas bei  $T=0$  als Funktion von  $N$ ,  $V$  und  $\varepsilon_F$ .
- 81.) Was ist die Sommerfeld Entwicklung? Leite sie her. Stelle die Koeffizienten als dimensionslose Integrale dar.
- 82.) Wende die Sommerfeld Entwicklung auf ein ideales Fermionen Gas in drei Dimensionen an, um die Korrekturen für kleine Temperaturen zum chemischen Potential und zur spezifischen Wärme zu bestimmen.
- 83.) Wie hängt der Entwicklungsparameter  $k_B T / \varepsilon_F$  in der Sommerfeld Entwicklung mit dem Parameter  $\lambda^3 N / g_S V$  zusammen (für ein ideales Fermigas)?