# Lectures:

**14.12.** Recapitulation. Bose-Einstein and Fermi-Dirac distribution. The ideal Bose Gas

**16.12.** Expansion for small $z$ and Bose Einstein condensation.

# Book: 
Schwabl 4.2, 4.4

# Excercises: 
Please hand in until Mo 3.1.2022, 8:00 (10 points each).

15a) Show for independent particles in the Grand Canonical Ensemeble that the square of number fluctuation is given by the sum over single particles states

$$\Delta N^2 = \sum_r \Delta n_r^2$$

b) Determine $\Delta n_r^2$ for a single particle Fermion state and express it in terms of the Fermi Dirac Distribution $\langle n_r \rangle$. Plot $\Delta n_r^2$ and $\langle n_r \rangle$ as a function of $x = \beta(\varepsilon - \mu)$. When is $\Delta n_r^2$ large? When are the relative fluctuations $\Delta n_r / \langle n_r \rangle$ large?

c) Determine $\Delta n_r^2$ for a single particle Boson state and express it in terms of the Bose Einstein Distribution $\langle n_r \rangle$. Plot $\Delta n_r^2$ and $\langle n_r \rangle$ as a function of $x = \beta(\varepsilon - \mu)$. When is $\Delta n_r^2$ large? When are the relative fluctuations $\Delta n_r / \langle n_r \rangle$ large?

16a) Show that the entropy $S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_{V,\mu}$ is always given by $S = k_B\left(\ln \mathcal{Z} + \beta(E - \mu N)\right)$.

b) Find the entropy for each independent single particle state and express it in terms of $\langle n_r \rangle$ for Fermions and Bosons, respectively.

c) Plot the results from b) as a function of $x = \beta(\varepsilon - \mu)$ and discuss when the entropy for each independent single particle state becomes largest for Fermions and Bosons, respectively.

# Übungen (deutsche Version)

15a) Zeige, dass für unabhängige Einteilchen-Zustände im Großkanonischen Ensemble die Teilchenfluktuationen durch die Summe über Einteilchenzustände gegeben ist

$$\Delta N^2 = \sum_r \Delta n_r^2$$

b) Bestimme $\Delta n_r^2$ für Fermionische Einteilchenzustände und drücke $\Delta n_r^2$ durch die Fermi Dirac Verteilung $\langle n_r \rangle$ aus. Plotte $\Delta n_r^2$ und $\langle n_r \rangle$ als a Funktion von $x = \beta(\varepsilon - \mu)$. Wann ist $\Delta n_r^2$ groß? Wann sind die relativen Fluktuationen $\Delta n_r / \langle n_r \rangle$ groß?

c) Bestimme $\Delta n_r^2$ für Bosonische Einteilchenzustände und drücke $\Delta n_r^2$ durch die Bose-Einstein Verteilung $\langle n_r \rangle$ aus. Plotte $\Delta n_r^2$ und $\langle n_r \rangle$ als a Funktion von $x = \beta(\varepsilon - \mu)$. Wann ist $\Delta n_r^2$ groß? Wann sind die relativen Fluktuationen $\Delta n_r / \langle n_r \rangle$ groß?

16a) Zeige, dass die Entropie $S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_{V,\mu}$ immer durch $S = k_B\left(\ln \mathcal{Z} + \beta(E - \mu N)\right)$ gegeben ist.

b) Bestimme die Entropie und drücke sie durch $\langle n_r \rangle$ aus jeweils für Fermionen und Bosonen.

c) Plotted as Resultat von b) als Funktion $x = \beta(\varepsilon - \mu)$ und erläutere wann die Entropy für einen unabhängigen Einteilchen-Zustand groß wird jeweils für Fermionen und Bosonen.

# Verständnisfragen

67.) Erläutere die Beschreibung von Microzuständen mit Hilfe von Besetzungszahlen. Warum ist das sinnvoll?

68.) Leite allgemeine Ausdrücke für die nichtwechselwirkenden bosonischen und fermionischen großkanonischen Zustandssummen als Produkt über Einteilchenzustände her.

69.) Leite die Bose-Einstein und die Fermi-Dirac Verteilung aus der Zustandssumme und der Wahrscheinlichkeitsverteilung von der Besetzung unabhängiger Zustände her. Diskutiere das Resultat.

70.) Zeige, wie die Teilchenzahl, die Energie, der Druck und die Entropie als Summe über Einteilchenzustände ausgedrückt werden können.

71.) Finde Integralausdrücke für $N$ und $E$ als Funktion von $z$ und $T$ in einem dreidimensionalen bosonischen Quantengas. Drücke die Integrale mit Hilfe der polylogarithmischen Funktion $\mathrm{Li}_\nu(z)$ aus. Wie kann mit Hilfe dieser Ausdrücke $E$ als Funktion von $N$, $V$ und $T$ bestimmt werden (Eine Skizze ist hilfreich hier)?

72.) Entwickle $N$ und $E$ als Funktion von kleinen $z$ und bestimme daraus das Verhalten von $E$ als Funktion von $N$, $V$ und $T$ für kleine Dichten. Was bedeutet das für den Druck?

73.) Argumentiere dass in der Berechnung der Teilchenzahl der Grundzustand eines Bosonen Gases ab einer kritischen Temperatur gesondert behandelt werden muss. Was ist die kritische Temperatur $T_c$?

74.) Berechne den Kondensatsanteil $x$ in einem dreidimensionalen Bosonengas als Funktion der Temperatur und der Kondensationstemperatur $T_c$.