Lectures:

7.12. Recapitulation. Indistinguishable particles: Bosons, Fermions
9.12. Grand canonical ensemble.

Book: Schwabl 2.7, 4.1

Excercises: Please hand in until Mo 13.12.2021, 8:00 (10 points each).

13a) Calculate the entropy for the Einstein model of independent oscillators as a function of temperature using the partition function. Determine the specific heat $C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$ (which will agree with the result from the lecture).

b) The frequency $\omega(d)$ of the oscillators may depend on the distance d between atomic sites. Derive an expression for the pressure as a function of temperature ($V = Nd^3$).

c) Assume that the dimensionless so-called Grüneisen-Parameter $\gamma = -\frac{\partial \ln \omega}{\partial \ln d}$ remains constant over a region of interest. Show that in this case the change of pressure of a material kept at constant volume is given by $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \gamma C_V / 3V$. Is this result only valid for the Einstein model or can it be generalized to the Debye model?

14.) Show using the definition of the entropy $S = -k_B \sum_{N=0}^{\infty} \sum_r P(N,\varepsilon_r) \ln(P(N,\varepsilon_r))$, that $S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_{V,\mu}$ in terms of the grand-canonical Potential. Calculate the entropy for independent indistinguishable classical particles with the single particle partition function Z_1. What is the entropy for an ideal classical gas?

Übungen (deutsche Version)

13a) Berechne die Entropie für das Einstein Modell als Funktion von der Temperatur aus der Zustandssumme. Zeige, dass $C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$ das gleiche Ergebnis wie in der Vorlesung liefert.

b) Die Frequenz $\omega(d)$ der Oszillatoren hängt im Allgemeinen vom Abstand d zwischen den Gitterplätzen ab. Stelle einen Ausdruck für den Druck als Funktion der Temperatur auf ($V = Nd^3$).

c) Nehme an, dass der dimensionslose Grüneisen-Parameter $\gamma = -\frac{\partial \ln \omega}{\partial \ln d}$ über den physikalisch relevanten Bereich konstant bleibt. Zeige, dass dann für die Druckänderung eines eingespannten Festkörpers gilt $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \gamma C_V / 3V$. Gilt dieses Resultat nur für das Einstein Modell oder kann es verallgemeinert werden (zB. für das Debye Modell)?

14.) Zeige mit Hilfe der Definition der Entropie $S = -k_B \sum_{N=0}^{\infty} \sum_r P(N, \varepsilon_r) \ln(P(N, \varepsilon_r))$, dass im großkanonischen Ensemble allgemein gilt $S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_{V,\mu}$. Berechne die Entropie für unabhängige ununterscheidbare klassische Teilchen mit Einteilchen-Zustandssumme Z_1. Was ist demnach die Entropie für ein ideales klassisches Gas?

Verständnisfragen

63.) Erkläre den Unterschied zwischen den Symmetrieeigenschaften von Bosonen und Fermionen und gebe ein Beispiel für zwei Teilchen und die resultierende Doppelsetzungswahrscheinlichkeit.

64.) Leite einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit für einen Zustand mit N Teilchen und Energie ε_r im Austausch mit einem Bad her Definiere die großkanonische Zustandssumme, das großkanonische Potential Φ, die Fugazität z und das chemische Potential μ.

65.) Erkläre das Konzept des Großkanonischen Ensembles. Stelle Ausdrücke für die Erwartungswerte von N, E, p, S und allgemeinen generalisierten Kräften auf.

66.) Wende das Konzept des Großkanonischen Ensembles auf ein ideales klassisches Gas an (bzw allgemeiner auf unabhängige klassische Teilchen mit Einteilchen-Zustandssumme Z_1). Was ist z? Finde einen Ausdruck für E und p als Funktion von Z_1, T, V und N.