Lectures:

23.11. Recapitulation. Single particle density of states. Maxwell's velocity distribution.

25.11. Quantized degrees of freedom. Ideal Gas with quantized degrees of freedom. Rotational degrees of freedom.

Book: Schwabl 2.6

Excercises: Please hand in until Mo 29.11.2021, 8:00 (10 points each):.

9) Using the single particle density of states $g(\varepsilon)$ we can determine the probability $P(\varepsilon)d\varepsilon = g(\varepsilon)e^{-\beta\varepsilon}d\varepsilon / Z_1$ for energies in the interval $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon[$ for each particle.

a) Consider a system with $g(\varepsilon) = 1$, i.e. the particles can uniformly exchange arbitrary amounts of energy. What is therefore the distribution of single particle energies? Calculate Z_1, *E,* and *S* for *N* distinguishable and indistinguishable particles, respectively. How many classical degrees of freedom with quadratic energy dependence would the particles have to have? What are examples?

b) Consider a model of a country, where *N* inhabitants (distinguishable particles) can exchange money ε (energy) randomly without constraints. Argue that this situation should result in a Boltzmann distribution of wealth corresponding to $g(\varepsilon) = 1$. What does the parameter β correspond to in this case? What are effects, which change $g(\varepsilon)$ in real countries?

c) Calculate the cumulative distribution function F(*x*) for the fraction of particles (people) with energy (wealth) ε<*x*. What is the median energy (median wealth) $\bar{\varepsilon}$ where half the people have more or less $F(\bar{\varepsilon}) = 1/2$? Compare with the average *E/N*. Argue that $1 - F(\varepsilon_{\max}) = 1/N$ defines a maximum energy $\varepsilon_{\max}$, where one can expect to find only one particle out of *N* to have more than $\varepsilon_{\max}$. Calculate $\varepsilon_{\max}$ for one mole, for *N*=83 000 000 (German population), and for *N*=10 (Top 10%) in units of the average *E/N*. Compare with estimated values for the wealth distribution of Germany from an internet search.

10) Vilfredo Pareto postulated more than 100 years ago a 80-20 rule, that 80% of the land was owned by only 20% of the people (or more general that solving 80% of the tasks only uses 20% of the resources – and vice versa). He proposed a more general cumulative distribution function $F(x) = 1 - (y/x)^a$ with a lower bound y<x and exponent a>1 for the fraction of people with $\varepsilon \in]y, x[$, i.e. who own less than *x*.

a) By taking the derivative, determine the probability density $P(\varepsilon)d\varepsilon$ for any person having wealth in the interval $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon[$. Calculate both the average wealth $\langle\varepsilon\rangle$ and the median wealth $\bar{\varepsilon}$ where $F(\bar{\varepsilon}) = 1/2$.

b) Which value of *a* is needed for the 80-20 rule to hold? Use this value to calculate $\varepsilon_{\max}$ with $1 - F(\varepsilon_{\max}) = 1/N$ for *N*=10 (Top 10%) and for *N*=83 000 000. Compare with exercise 9c and with corresponding values for the distribution of wealth in Germany.

c) Calculate the entropy and express it as a function of average wealth and the exponent *a.* Show that the entropy is smaller that the corresponding result from exercise 9a and determine the value of *a* for which the difference becomes smallest (Pareto found that *a*~1,5 describes many real situations reasonably well).

Übungen (deutsche Version)

9) Für unabhängige Teilchen mit Einteilchenzustandsdichte $g(\varepsilon)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Energie eines Teilchens im Intervall $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon[$ liegt durch $P(\varepsilon)d\varepsilon = g(\varepsilon)e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon / Z_1$ gegeben.

a) Betrachte ein System mit $g(\varepsilon) = 1$, dh. die Teilchen können zufällig beliebige Energiemengen gleichförmig auf- und abgeben. Was ist die Verteilung der Teilchenenergien? Berechne Z_1, E und S jeweils für N unterscheidbare bzw. ununterscheidbare Teilchen. Wie viele klassische Freiheitsgrade mit quadratischer Energieabhängigkeit müssten diese Teilchen haben. Was sind Beispiele?

b) Betrachte einen fiktiven Staat, in dem N Einwohner (unterscheidbare Teilchen) ohne Einschränkung zufällig Geld (Energie) austauschen können. Argumentieren, dass dementsprechend die Wahrscheinlichkeit der Geldmengen jedes Einwohners ebenfalls $g(\varepsilon) = 1$ entsprechen muss. Welche Rolle spielt in diesem Fall der Parameter β? Welche Effekte ändern $g(\varepsilon)$ in realen Staaten?

c) Berechne die sogenannte Verteilungsfunktion F(x) für den Anteil von Teilchen (Einwohnern) mit einer Energie (Geldmenge) $\varepsilon<x$. Was ist die mittlere Energie (mittleres Vermögen) $\bar{\varepsilon}$ bei dem die Hälfte mehr oder weniger hat $F(\bar{\varepsilon}) = 1/2$? Vergleiche mit der Energie (Vermögen) pro Teilchen E/N. Argumentiere, dass $1 - F(\varepsilon_{\max}) = 1/N$ eine maximale Energie $\varepsilon_{\max}$ definiert, bei der man erwarten kann, dass nur ein Teilchen von N mehr als $\varepsilon_{\max}$ hat. Berechne $\varepsilon_{\max}$ in Einheiten von E/N jeweils für ein Mol, für N=83 000 000 (Einwohner in D) und für N=10 (Top 10%). Vergleiche die Werte mit der geschätzten Vermögensverteilung in Deutschland gemäß Internetrecherche.

10) Vilfredo Pareto postulierte vor über 100 Jahren die 80-20 Regel, dass 80% des Grundbesitzes nur 20% der Bevölkerung gehört (oder allgemeiner, dass 80% der Aufgaben von nur 20% der eingesetzten Ressourcen gelöst werden – und umgekehrt). Er stellte eine allgemeine Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - (y/x)^a$ mit einer unteren Schranke $y<x$ und Exponent $a>1$ auf, der den Anteil von Leuten mit $\varepsilon \in]y, x[$ angibt, die weniger als x besitzen.

a) Bestimme durch die Ableitung die Wahrscheinlichkeit $P(\varepsilon)d\varepsilon$, dass der Besitz einer Person im Intervall $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon[$ liegt. Berechne das Durchschnittsvermögen und das mittlere Vermögen (mit $F(\bar{\varepsilon}) = 1/2$).

b) Für welchen Wert von a gilt die 80-20 Regel? Was ist $\varepsilon_{\max}$ für diesen Wert von a wobei $1 - F(\varepsilon_{\max}) = 1/N$ und N=10 (Top 10%) bzw N=83 000 000. Vergleiche die Werte mit Aufgabe 9c) und mit der tatsächlichen Vermögensverteilung in Deutschland.

c) Berechne die Entropie und drücke sie als Funktion des Durchschnittsvermögens und dem Exponenten a aus. Zeige, dass sie kleiner als die entsprechende Entropie aus 9a ist und bestimme a wenn die Differenz minimal wird. (Pareto hat für a~1,5 eine gewisse Übereinstimmung mit vielen realen Fällen gefunden).

Verständnisfragen

47.) Wie ist die Einteilchenzustandsdichte $g(\varepsilon)$ definiert?

48.) Leite die Verteilung der Geschwindigkeiten in eine Richtung v_x und die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung für |v| her.

49.) Berechne die Erwartungswerte $\langle v_x \rangle, \langle |v| \rangle, \langle v^2 \rangle$ und die wahrscheinlichste Geschwindigkeit $v_{\max}$ für die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung. Wie groß ist die Fluktuation der Geschwindigkeiten?

50.) Welche zwei Bedingungen müssen gegeben sein, damit eine klassische Näherung von Quantenfreiheitsgraden sinnvoll ist?

51.) Leite die Einteilchenzustandsdichte für den Fall von einem freien Teilchen in drei Dimensionen her.

52.) Schreibe einen Ausdruck für die Einteilchen-Zustandssumme über die quantisierten kinetischen Freiheitsgrade eines Gases. Welche Bedingung muss für die Längenskalen gelten, damit die Hochtemperaturentwicklung gerechtfertigt ist?

53.) Wie ist die thermische Wellenlänge definiert? Vergleiche mit der De-Broglie Wellenlänge typischer Geschwindigkeiten aus der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung. Welche Bedingung muss für die Dichte gelten, damit die Teilchen unabhängig werden, d.h. Quanteninterferenzeffekte vernachlässigbar sind?