Lectures:

9.11. Recapitulation. Microcanonical Ensemble. Examples: Oscillators, Polymers, Ideal Gas.
11.11. Energetic equilibrium: Statistical interpretation of the 2nd law.

Book:

Schwabl 2.1.-2.4
Additional reading (see homepage): Schrödinger: *What is life?*

Excercises:

Please hand in until Mo 15.11.2021, 8:00 (10 points each):.

5.) Determine an expression for the number $\Omega(E,N,\omega)$ of classical states as a function of total energy E for N distinguishable independent classical oscillators in d dimensions with energies

$$\varepsilon_j = \vec{p}_j^{\,2}/2m + \tfrac{1}{2}m\omega^2\vec{x}_j^{\,2} \quad (j=1,\ldots N)$$

Calculate $E(T)$, $c_V(T)$ and the generalized force to the parameter ω using the microcanonical ensemble.

6a) The probabilty distribution for two events (–1) and (+1) is given by p_+ and p_- with $p_+ + p_- = 1$. Apply the central limit theorem to approximately determine the probability distribution for the sum ($X = n_+ - n_-$) after a large number of events $N=n_+ + n_-$. Accordingly, what is the mean squared distance after a long time T for a particle that can hop in each time-step randomly up, down, left or right starting from the origin with equal probabilities.

b) Determine the exact number of possibilities $\Omega(n_+,N)$, to choose n_+ particles out of N distinguishable particles. Approximate the expression using Stirling's formula $x! \approx \sqrt{2\pi x}e^{-x}x^x$ for very large n_+, N and compare the resulting probability distribution of the sum $X = n_+ - n_- = 2n_+ - N$ with part a) with $p_+ = p_- = 1/2$.

c) For N particles with two spin states (–1) and (+1) in a magnetic field B the energy is given by $E = -BX = B(N - 2n_+)$. Calculate the entropy $S(E,N)$ and the temperature $T(E,N)$ using the approximation for $\Omega(n_+,N)$ in part b). If the temperature becomes negative: What is the physical meaning? Can such a state be prepared physically? What happens by contact of positive and negative temperatures?

Übungen (deutsche Version)

5.) Bestimme einen Ausdruck für die Anzahl $\Omega(E,N,\omega)$ der klassischen Zustände in Abhängigkeit der Gesamtenergie E für N unterscheidbare unabhängige klassische Oszillatoren in d Dimensionen mit Energie

$$\varepsilon_j = \vec{p}_j^{\,2}/2m + \tfrac{1}{2}m\omega^2\vec{x}_j^{\,2} \quad (j=1,\ldots N)$$

Berechne $E(T)$, $c_V(T)$ und die generalisierte Kraft zum Parameter ω mit Hilfe des mikrokanonischen Ensembles.

6a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für zwei Ereignisse (–1) und (+1) soll durch die Werte p_+, p_- mit $p_+ + p_- = 1$ gegeben sein. Nutze den zentralen Grenzwertsatz um die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Summe ($X = n_+ - n_-$) nach sehr vielen Ereignissen $N = n_+ + n_-$ näherungsweise zu bestimmen. Was ist entsprechend das mittlere Quadrat des Abstands nach einer langen Zeit T für ein Teilchen, das vom Ursprung aus in jedem Zeitschritt zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links, rechts, oben oder unten hüpfen kann?

b) Bestimme die exakte Anzahl von Möglichkeiten $\Omega(n_+,N)$, dass n_+ Teilchen aus einer Anzahl von N unterscheidbaren Teilchen ausgewählt werden. Nähere den Ausdruck mit der Stirlingsschen Formel $x! \approx \sqrt{2\pi x}\,e^{-x}x^x$ für sehr große n_+, N und vergleiche die resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Summe $X = n_+ - n_- = 2n_+ - N$ mit Teil a) für $p_+ = p_- = 1/2$.

c) Für N Teilchen mit zwei Spinzuständen (–1) und (+1) in einem Magnetfeld B ist die Energie durch $E = -BX = B(N - 2n_+)$ gegeben. Berechne die Entropie $S(E,N)$ und die Temperatur $T(E,N)$ mit Hilfe der Näherung für $\Omega(n_+,N)$ von Teil b). Falls die Temperatur negativ wird: Was ist die physikalische Bedeutung? Kann ein solcher Zustand physikalisch erzeugt werden? Was passiert bei Kontakt von positiven und negativen Temperaturen?

Verständnisfragen

26.) Beschreibe das Konzept des Mikrokanonischen Ensembles. Was ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Mikrokanonischen Ensemble? Was ist die Entropie?

27.) Wie kann man die Entropie für eine Anzahl N von Quantenoszillatoren mit Gesamtenergie $R\hbar\omega$ mit Hilfe kombinatorischer Methoden bestimmen?

28.) Wann sind zwei Systeme im energetischen Gleichgewicht im Mikrokanonischen Ensemble? Was bedeutet das für die Entropie?

29.) Definiere *Temperatur* im Mikrokanonischen Ensemble. Wie werden generalisierte Kräfte berechnet?

30.) Berechne die Entropie eines idealen klassischen Gases mit Hilfe des Mikrokanonischen Ensembles (bis auf Vorfaktor). Leite das Ideale Gasgesetz her. Zeige, dass die durchschnittliche Energie pro Teilchen $E=3k_BT/2$ ist.

31.) Wende das Mikrokanonische Ensemble auf ein vereinfachtes Polymermodel mit Segmenten in zwei Richtungen an und bestimme die generalisierte Kraft als Funktion der Temperatur.

32.) Was versteht man unter dem Loschmidt Paradoxon und dem Zermelo Paradoxon? Beschreibe einen Maxwellschen Dämon.

33.) Betrachte einen kleinen Wärmeaustausch zweier Teilsysteme im mikrokanonischen Ensemble und finde einen Ausdruck für die Entropieänderung bis zur zweiten Ordnung in der Wärmemenge. Was ist die physikalische Interpretation?