

**Lectures:**

**17.1.2023** Recapitulation. Introduction to phase transitions. Order parameters. Latent heat. Clausius Clayperyon equation.

**19.1.2023** Phase diagram of water. Derivation of the Van-der-Waals equation of state.

**Book:** Schwabl 7.1, 3.8

**Excercises:** Please hand in until Di 24.1.2023, 12:00 (10 points each).

21) Consider  ${}^4\text{He}$  (Boson with spin  $s=0$  and mass  $m=4u$ ) and  ${}^3\text{He}$  (Fermion with spin  $s=1/2$  and mass  $m=3u$ ). Assume that they are densely packed in a liquid state at a distance of twice the atomic radius  $(V/N)^{1/3} \approx 2r = 256\text{pm}$ . Determine the theoretical (non-interacting) values of the critical Bose-Einstein temperature and the Fermi temperature, respectively. Use the Sommerfeld expansion for  ${}^3\text{He}$  to estimate at which temperature the chemical potential reaches zero  $\mu(T)=0$ .

22a) Assuming a continuous single particle density of states  $g(\varepsilon)$ , show that the Sommerfeld expansion in general predicts lowest order corrections of  $\mu(T)$  and  $c_v(T)$  given by

$$\mu(T) = \varepsilon_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{6} \frac{g'(\varepsilon_F)}{g(\varepsilon_F)} \frac{(k_B T)^2}{\varepsilon_F} \right) \text{ und } c_v(T) = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T g(\varepsilon_F).$$

b) Consider a 3D relativistic Fermi gas  $\varepsilon(p) = c\sqrt{m^2 c^2 + p^2}$  in the extreme relativistic limit  $m \rightarrow 0$ . Calculate  $g(\varepsilon)$  as well as  $\varepsilon_F$ . Determine the  $T \rightarrow 0$  pressure in the relativistic limit  $mc^2 \ll \varepsilon_F$  at a given density and compare with the non-relativistic limit  $\varepsilon_F \ll mc^2$ . Note, that for very dense matter like a white dwarf or a neutron star the extreme relativistic limit may be assumed independent of actual temperature.

21) Betrachte  ${}^4\text{He}$  (Boson mit Spin  $s=0$  und Masse  $m=4u$ ) und  ${}^3\text{He}$  (Fermion mit Spin  $s=1/2$  und Masse  $m=3u$ ). Wie nehmen an, dass im flüssigen Zustand der Abstand ungefähr dem doppelten Atomradius entspricht  $(V/N)^{1/3} \approx 2r = 256 \text{ pm}$ . Bestimme die jeweiligen theoretischen (nicht-wechselwirkenden) Werte für die kritische Bose-Einstein Temperatur und die Fermi Temperatur. Nutze die Sommerfeld Entwicklung für  ${}^3\text{He}$ , um abzuschätzen bei welcher Temperatur das chemische Potential verschwindet  $\mu(T)=0$ .

22a) Unter der Annahme einer beliebigen kontinuierlichen Einteilchenzustandsdichte  $g(\varepsilon)$ , zeige dass die Sommerfeld Entwicklung allgemein folgende Korrekturen für  $\mu(T)$  and  $c_v(T)$  vorhersagt

$$\mu(T) = \varepsilon_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{6} \frac{g'(\varepsilon_F)}{g(\varepsilon_F)} \frac{(k_B T)^2}{\varepsilon_F} \right) \text{ und } c_v(T) = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T g(\varepsilon_F).$$

b) Betrachte ein 3D relativistisches Fermi Gas  $\varepsilon(p) = c\sqrt{m^2 c^2 + p^2}$  im extremen relativistischen Grenzwert  $m \rightarrow 0$ . Berechne  $g(\varepsilon)$  und  $\varepsilon_F$ . Was ist der  $T \rightarrow 0$  Druck im relativistischen Grenzwert  $mc^2 \ll \varepsilon_F$  bei gegebener Dichte? Vergleiche mit dem nicht-relativistischen Wert für  $\varepsilon_F \ll mc^2$ . Beachte, dass für sehr dichte Materie wie Neutronen Sterne oder Weiße Zwerge der relativistische Grenzwert unabhängig von der angenommenen Temperature berücksichtigt werden muss.

## Verständnisfragen

- 84.) Erläutere wie man einen Phasenübergang zwischen einer geordneten und einer ungeordneten Phase quantitativ verstehen kann indem man die Freie Energie minimiert. Was bedeutet dies für die Energie und Entropie bei hohen bzw. tiefen Temperaturen?
- 85.) Was ist die Ehrenfest Klassifikation? Was zeichnet einen Phasenübergang von 1. Ordnung aus? Was versteht man unter einem Ordnungsparameter?
- 86.) Was besagt die Gibbssche Phasenregel für die Koexistenz verschiedener Phasen?
- 87.) Was ist die latente Wärme?
- 88.) Was ist die Clausius Clapeyron Gleichung? Leite sie her.
- 89.) Skizziere das Phasendiagramm von Wasser. Leite Gleichungen für den ungefähren Verlauf der Phasengrenzkurven zwischen Wasser/Eis, und Wasser/Dampf her. Was ist ein Tripelpunkt? Welche Beziehung zwischen den Steigungen der Phasengrenzkurven gibt es dort?