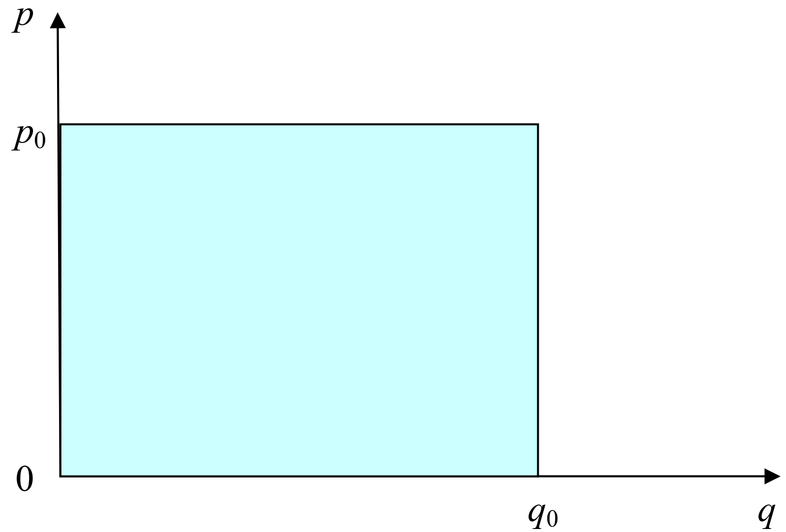
Übungen 9. Vorlesungswoche: Bitte einreichen bis 19.6.2023, 10:00 Uhr in Kästen (5. Stock, Gebäude 46).

10. (10 Punkte)

Wir betrachten ein-dimensionale Bewegungen im (q,p) Phasenraum.

Gegeben sei eine Region im Phasenraum bei t=0, die durch eine maximale Auslenkung q_0 und einen maximalen Impuls p_0 begrenzt wird: $0<q<q_0, \quad 0<p<p_0$.



Berechne und skizziere die Entwicklung dieser Region nach einer Zeit $t>0$ für die folgenden Fälle:

a) Freies Teilchen $V=0$

b) Teilchen im homogenen Schwerefeld $V = mgq$

c) Harmonischer Oszillator $V=\frac{1}{2}m\omega^2 q^2$

Argumentiere, dass die Fläche der Region in allen Fällen erhalten bleibt.

Darstellungsräume und Anfangsbedingungen

Koordinatendarstellung $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N)$

Konfigurationsraum (Transformation kann auf verschiedene Arten definiert werden)

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_S, t) \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_S)$$

Ereignisraum

$$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_S) \quad \text{und} \quad t$$

Phasenraum

$$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_S) \; ; \quad \boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_S)$$

Zustandsraum

$$\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_S) \; ; \quad \boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_S) \quad \text{und} \quad t$$

Zustandsgröße

Eine Größe die für jeden Zustand eindeutig bestimmt werden kann:

Observable $f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$

Zeitliche Änderungen einer Zustandsgröße

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Definition der Poisson-Klammer zwischen zwei beliebigen Observablen

$$\{f,g\}=\sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right)$$

Formelle Eigenschaften:

- Unabhängig von der Wahl der kanonischen Variablen $(\mathbf{q},\mathbf{p})$
- Antisymmetrisch $\{f,g\}=-\{g,f\}\,; \qquad \{f,f\}=0$
- Linear $\{c_1 f_1+c_2 f_2, g\}=c_1\{f_1,g\}+c_2\{f_2,g\}$
- Produktregel $\{f,g\,h\}=g\,\{f,h\}+\{f,g\}\,h$
- Jacobi Identität $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$

$$\{f,g\}=\sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right)$$

Allgemeine Beschreibung der Zeitentwicklung:

$$\frac{dF}{dt}=\{F,H\}+\frac{\partial F}{\partial t}$$

Insbesondere:

$$\dot{q}_j=\{q_j,H\} \qquad \dot{p}_j=\{p_j,H\}$$

Weitere Eigenschaften

$$\frac{\partial F}{\partial p_j}=-\{F,q_j\}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial q_j}=\{F,p_j\}$$

Fundamentale Poisson-Klammern

$$\{q_i,q_j\}=0\,, \qquad \{p_i,p_j\}=0\,, \qquad \{p_i,q_j\}=-\delta_{ij}$$

→ (q_i,p_i) nennt man <u>kanonisch konjugiert</u>

Eine ***Phasen*****transformation** $\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{p}),\ \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q},\mathbf{p})$ heißt **kanonisch**, falls die fundamentalen Poisson-Klammern erhalten sind

dann sind die kanonischen Bewegungsgleichungen gegeben durch die transformierte Hamilton Funktion:

$\tilde{H}(\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}}) = H(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}}),\mathbf{p}(\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}}))$

Beispiele:

Vertauschung von Ort und Impuls

$$\bar{q}_j = \bar{q}_j(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = -p_j$$
$$\bar{p}_j = \bar{p}_j(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = q_j$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega_0^2 q^2$$

Harmonischer Oszillator

$$q = \sqrt{\frac{2\bar{p}}{m\,\omega_0}}\,\sin\bar{q}\,,$$

$$p = \sqrt{2\bar{p}\,m\,\omega_0}\,\cos\bar{q}$$

$$\begin{aligned}\overline{H}\,(\bar{q},\bar{p}) &= H\,(q\,(\bar{q},\bar{p})\,,\,p\,(\bar{q},\bar{p}))\\ &= \frac{1}{2m} 2\bar{p}\,m\,\omega_0\,\cos^2\bar{q} + \frac{1}{2} m\,\omega_0^2 \frac{2\bar{p}}{m\,\omega_0}\,\sin^2\bar{q}\end{aligned}$$