Keine Übungen diese Woche. Übungen 8 und 9 von letzter Woche bitte bis 12.6. einreichen.

<u>Verständnisfragen</u> für die Vorlesungen 5 bis 8 (z.B. für Klausurvorbereitung)

Vorlesung 5

29. Wie müssen die Euler-Lagrange Gleichungen erweitert werden, wenn es (dissipative) Kräfte gibt, die keinem Potential entsprechen.
30. Wie kann man die Dissipation berechnen? Was ist die Rayeigh'sche Dissipationsfunktion und für welche Reibung gilt sie?
31. Stelle die Bewegungsgleichung für ein Teilchen im Gravitationspotential mit Stokes'sche Reibung auf und finde eine Lösung.
32. Stelle die Lagrangefunktion für ein Doppelpendel auf, bei dem an der Masse m_1 eines starren Pendels ein zweites Pendel mit Masse m_2 schwingt.

Vorlesung 6

33. Leite eine allgemeine Form der Lagrangefunktion her für kleine Auslenkungen von s generalisierten Koordinaten um eine Gleichgewichtsposition $\mathbf{q}_0$.
34. Wie lauten die Bewegungsgleichungen für eine Langrangefunktion die bilinear in den Geschwindigkeiten und den Orten ist?
35. Erläutere die Lösungstrategie zum Finden von Normalmoden für allgemeine gekoppelte linearisierte Bewegungsgleichungen um das Gleichgewicht.
36. Erläutere eine Legendre Transformation für eine Funktion von zwei Variablen. Was wird mit der Legendre Tranformation erreicht?
37. Leite die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für eine generalisierte Koordinate und Impuls in einem allgemeinen konservativen Potential her.
38. Gebe eine Zusammenfassung für den Hamilton Formalismus für s generalisierte Koordinaten und Impulse. Was sind Unterschiede/Vorteile/Nachteile zur Lagrange Methode?

Vorlesung 7

39. Wende den Hamilton Formalismus für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtsposition an, dh. für ein bilineares Model. Leite die Eigenwertgleichung her.
40. Wende den Hamilton Formalismus auf ein ebenes starres Pendel der Länge l an. Gebe die Gleichungen für Phasenraumbahnen $p(q)$ an.
41. Drücke die kinetische Energie in generalisierten Koordinaten aus für eine allgemeine Transformation $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_S, t)$.
42 Unter welchen Bedingungen entspricht die Hamiltonfunktion der Energie?
43. Wende den Hamilton Formalismus für N Teilchen in einem konservativen Potential ohne Zwangsbedingungen an.
44. Wende den Hamilton Formalismus auf das Problem eines rotierenden Stabes mit einer frei gleitenden Perle an. Was sind die Gleichungen für Phasenraumbahnen $p(q)$?

Vorlesung 8

45. Wende den Hamilton Formalismus auf ein geladenes Teilchen in einem Vektorpotential an.
46. Was versteht man unter dem Vektorfeld der Phasenraumgeschwindigkeiten? Zeige, dass es divergenzfrei ist.
47. Was besagt der Liouvillesche Satz?
48. Wie kann man die Durchlaufzeit für eine Phasenraumbahn in einer Koordinate berechnen?
49. Stelle das Integral zur Berechnung der Umlaufzeit für ein mathematisches Pendel auf.

Beispiel: Geladenes Teilchen

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)=\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2+\bar{q}\,(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A})-\bar{q}\,\varphi = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\bar{q}(\dot{x}A_x+\dot{y}A_y+\dot{z}A_z)-\bar{q}\varphi$$

Generalisierte Impulse

$$(*)\quad p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}+\bar{q}A_x(\vec{r})$$

$$\dot{\vec{r}}\cdot\vec{p}=\dot{\vec{r}}\cdot(m\dot{\vec{r}}+\bar{q}\vec{A})$$

Hamilton Funktion $H(\vec{q},\vec{p})$

$$H=\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}-L=\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}+\bar{q}\varphi=\frac{1}{2m}(\mathbf{p}-\bar{q}\mathbf{A})^2+\bar{q}\varphi$$

Falls $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}=0$; $\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0$

$\frac{\partial H}{\partial t}=0$ dann

$E=H=\text{const.}$

Bewegungsgleichungen

1.) $$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{p_x-\bar{q}A_x}{m} \Leftrightarrow (*)$$

2.) $$\dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}=\bar{q}\left(\frac{1}{m}(\mathbf{p}-\bar{q}\mathbf{A})\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

$$\ddot{x}=\frac{\dot{p}_x}{m}-\frac{\bar{q}}{m}\frac{dA_x}{dt}=\frac{1}{m}F_x$$ im Vergleich 4-6

FAZIT Hamilton Formalismus:

$$\dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$\Leftrightarrow$ 1) $p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

2) Berechne $\sum_j \dot{q}_j p_j$

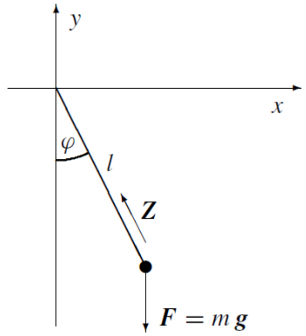
3.) $H=\sum_j \dot{q}_j p_j - L$ als Fkn von $\vec{q},\vec{p}$

Vorteil: Analyse mithilfe von $H(\vec{q},\vec{p})$

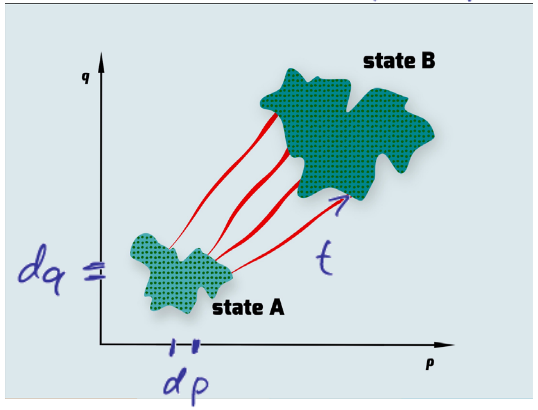
- Erhalten falls $-\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial t}=0$
- Entspricht Energie falls $\frac{\partial \vec{r}(\vec{q})}{\partial t}=0$ und $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}}=0$ (außer bei Vektorpotential)

Betrachtungen im Phasenraum $(\mathbf{q},\mathbf{p})$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1,\cdots,s$$



- Der Phasenraum ist $2s$ dimensional $(q_1, \dots q_s, p_1 \dots p_s)$
  können unabh. gewählt werden, aber Zeitentwicklungen bedingen sich.
- Jeder Punkt $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ im Phasenraum entspricht einer Anfangsbedingung bzw. Zustand
- Man kann auch Bereiche von Punkten oder eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(\mathbf{q},\mathbf{p})$ betrachten.



"Ensemble"

z.B. $s=1$ $\rho(q,p)\,dq\,dp$ = Wahrscheinlichkeit das System im Bereich $[q, q+dq[$ und $[p, p+dp[$ zu finden.

Es gilt $\int \rho(q,p)\,dq\,dp = 1$

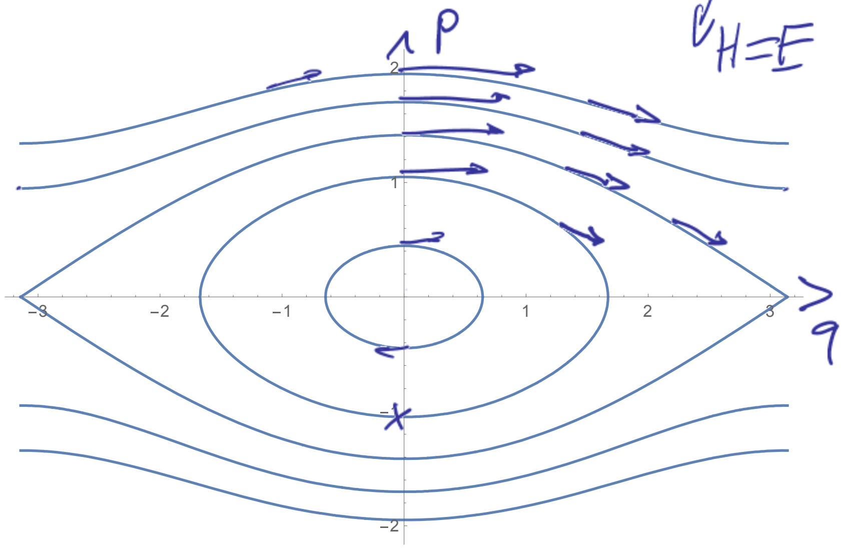
Beispiel: Starres Pendel

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = E = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos q$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -mgl\sin q$$

- Die Bahnen können periodisch, offen, gedämpft, oder chaotisch verlaufen



Zeitentwicklung $(q_j(t), p_j(t))$:
Jedem Punkt wird eine Phasenraumgeschwindigkeit zugewiesen

Vektorfeld $(\dot{q}_j, \dot{p}_j) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)$

d.h. jedem Punkt $(\vec{q}, \vec{p})$ wird ein Vektor $(\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}})$ zugeordnet

Bei konservativen Systemen ist das Vektorfeld $(\dot q_j,\dot p_j)=\left(\frac{\partial H}{\partial p_j},-\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)^{(*)}$ **der Phasenraumgeschwindigkeiten divergenzfrei**

$$\mathrm{div}\,\vec F=\vec\nabla\cdot\vec F=\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\dots\frac{\partial F_{2s}}{\partial x_{2s}}\right)$$

$$\vec F=(\dot q_1\dots\dot q_s,\dot p_1\dots\dot p_s)$$

$$\vec X=(q_1\dots q_s,p_1\dots p_s)$$

$$\mathrm{div}\,\vec F=\mathrm{div}(\dot{\mathbf q},\dot{\mathbf p})=\sum_j\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)-\sum_j\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)=0$$

$$=\sum_j\frac{\partial\dot q_j}{\partial q_j}+\sum_j\frac{\partial\dot p_j}{\partial p_j}\overset{(*)}{=}\sum_j\left(\cancel{\frac{\partial^2H}{\partial q_j\partial p_j}}-\cancel{\frac{\partial^2H}{\partial p_j\partial q_j}}\right)=0$$

Das Vektorfeld ist quellenfrei und senkenfrei.

da $\mathrm{div}\,\vec F=0$ wegen Satz von Gauß $\int_{Vol}\mathrm{div}\,\vec F\,d\vec V=\oint_{Oberfl.}\vec F\cdot\vec n\,d\vec n=0$ (hier)

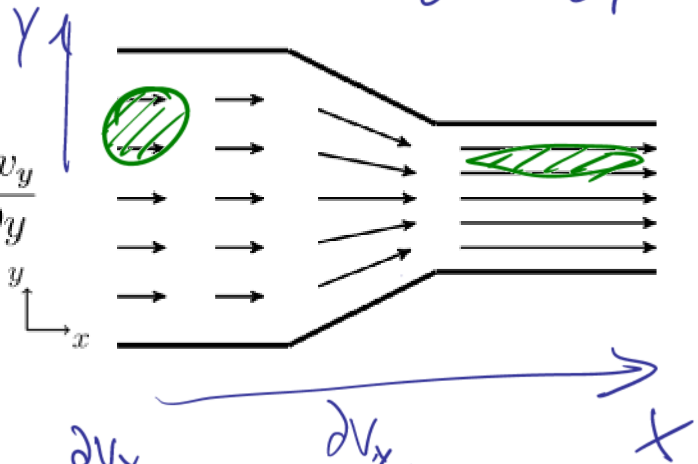
rein = raus

wie Fluß eines (inkompressiblen) Flüssigkeit

$$\mathrm{div}\,\vec v=0=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

Volumen eines "Tropfen" ändert sich nicht.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{\partial v_y}{\partial y}$$



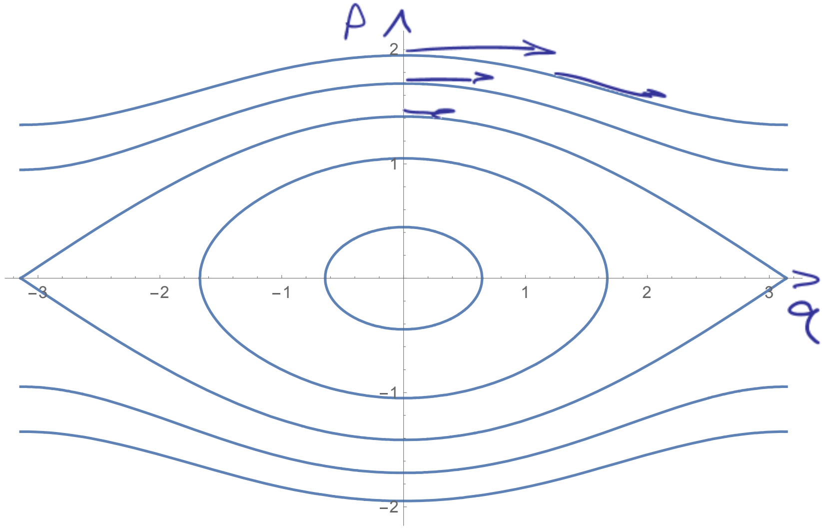
$\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$ $\frac{\partial v_y}{\partial y}<0$

Beispiel: Starres Pendel

$$H(\mathbf q,\mathbf p)=E=\frac{p^2}{2ml^2}-mgl\cos q$$

$$\dot q=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{ml^2}$$

$$\dot p=-\frac{\partial H}{\partial q}=-mgl\sin q$$



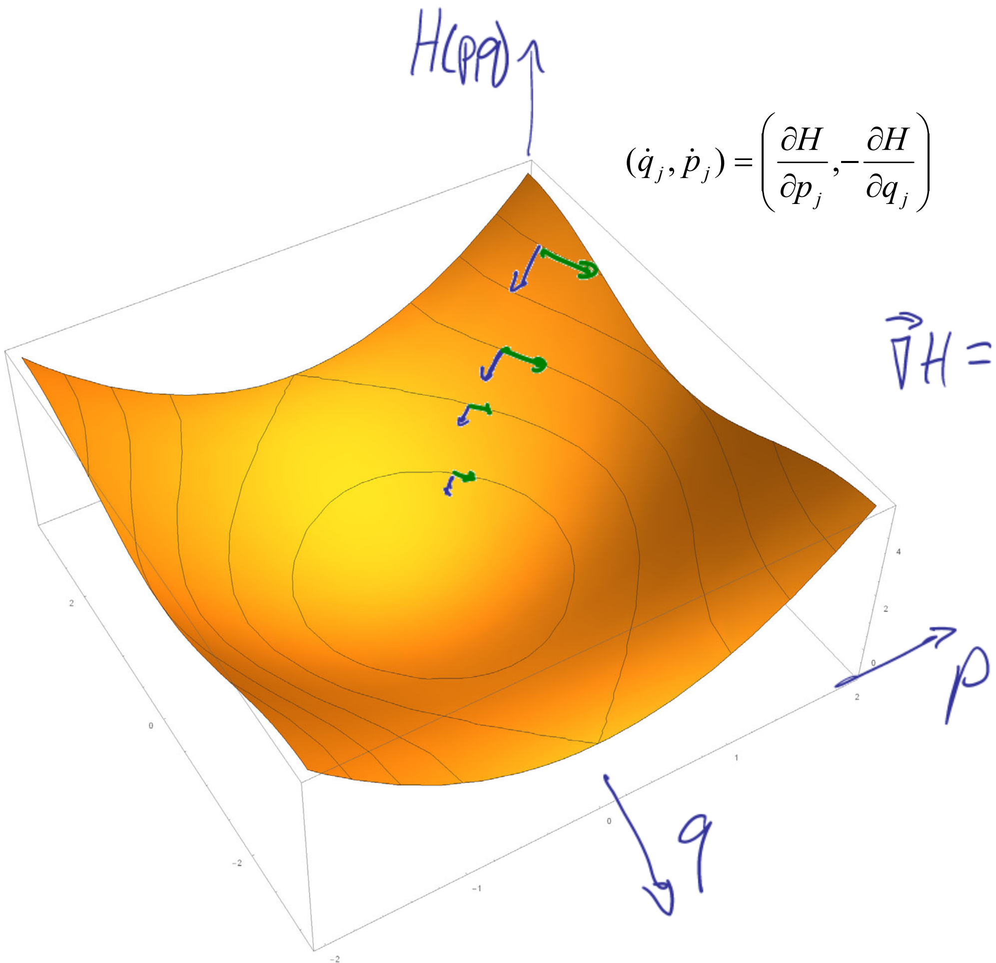
Satz von Liouville

Die Dichte der Systempunkte im Phasenraum ist zeitlich konstant.

wegen Analogie zu einem Tropfen in einer strömenden Flüssigkeit mit $\mathrm{div}\,\vec{v}=0$

(Satz von Gauß mit $\mathrm{div}\,\vec{F}=0$)

Bemerkung: Anwendung auf $\rho(\vec{q},\vec{p})$ führt mit Kontinuität zur Liouville Gleichung.



$$(\dot{q}_j, \dot{p}_j) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial q_j} \right)$$

Beobachtung

$$\vec{\nabla} H = \mathrm{grad}\, H = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial H}{\partial q_s}, \frac{\partial H}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial H}{\partial p_s} \right)$$

in $s=1$

$$\vec{\nabla} H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix}$$

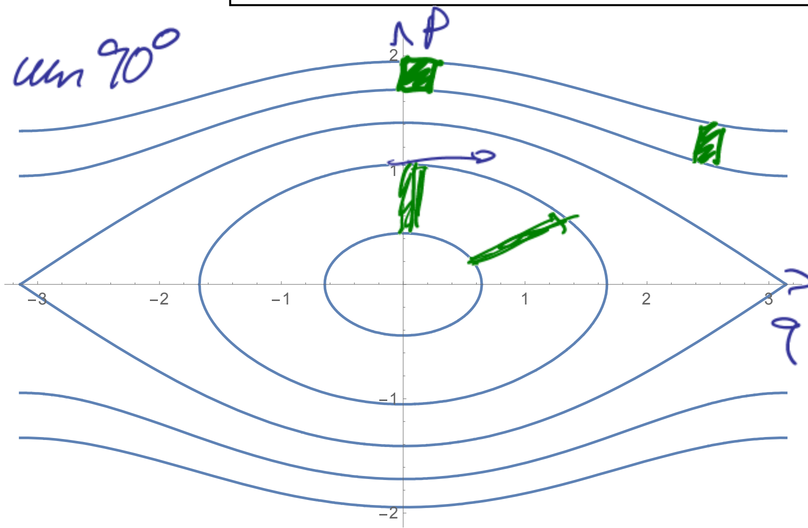
Drehung um 90°

Beispiel: Starres Pendel

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos q$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m\,l^2}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\,g\,l\,\sin q$$



Integration der Bewegung im Phasenraum

Aufgabe 7: $V(r) = a \ln\frac{r}{b}$

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m(q)} + V(q) + \text{rest (unabh. von } q,p\text{)}$$ gilt für viele Fälle

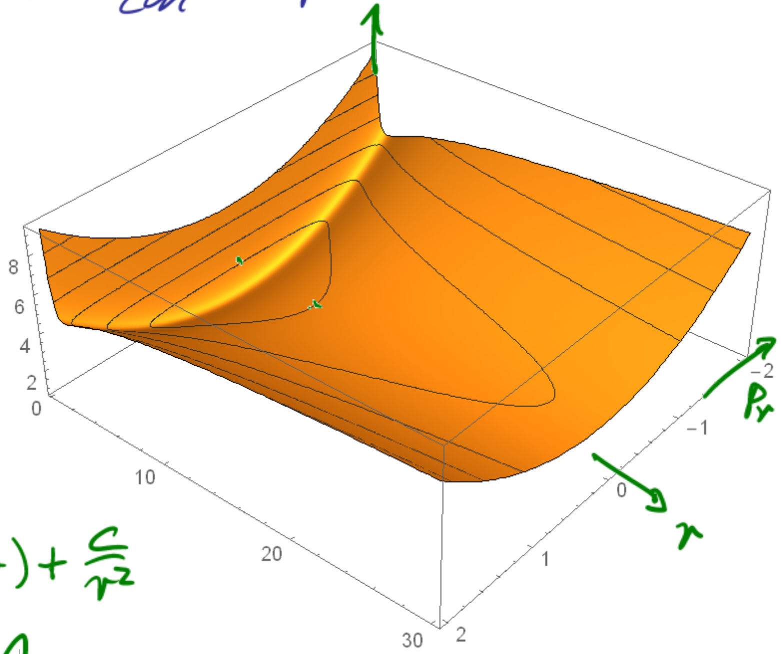
$$H(r,p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{c}{r^2} + V(r) + \text{rest}$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m'} = \sqrt{\frac{2(E-V)}{m'}}$$

$$p^2 = 2m'(H-V) = 2m'(E-V)$$

$$dt = \frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{2(E-V(q))}}dq = f(q)dq \Rightarrow T_{a\to b} = \int_a^b f(q)dq$$

mit $f(q) = \sqrt{\frac{m'}{2(E-V)}}$



Definiere Umkehrpunkte: maximale Auslenkung und minimale Auslenkung

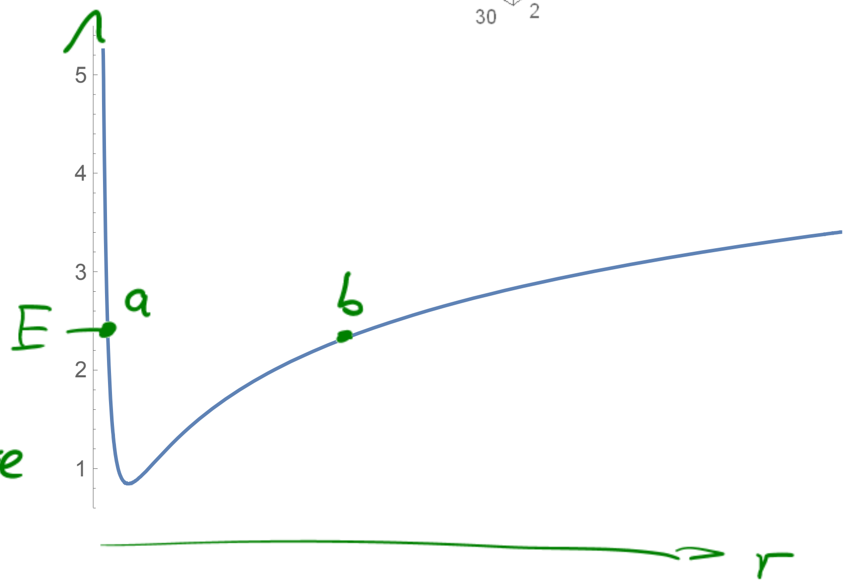
wobei $p=0$; d.h. $E=V$

$V(r) + \frac{c}{r^2}$

können genutzt werden um Umlaufzeit T zu berechnen.

$$\frac{1}{2}T = \int_a^b f(q)dq$$

wobei a und b Umkehrpunkte

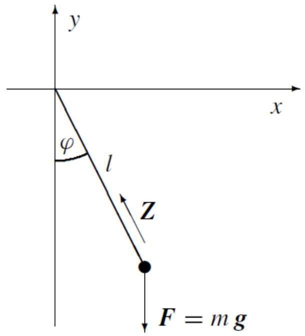


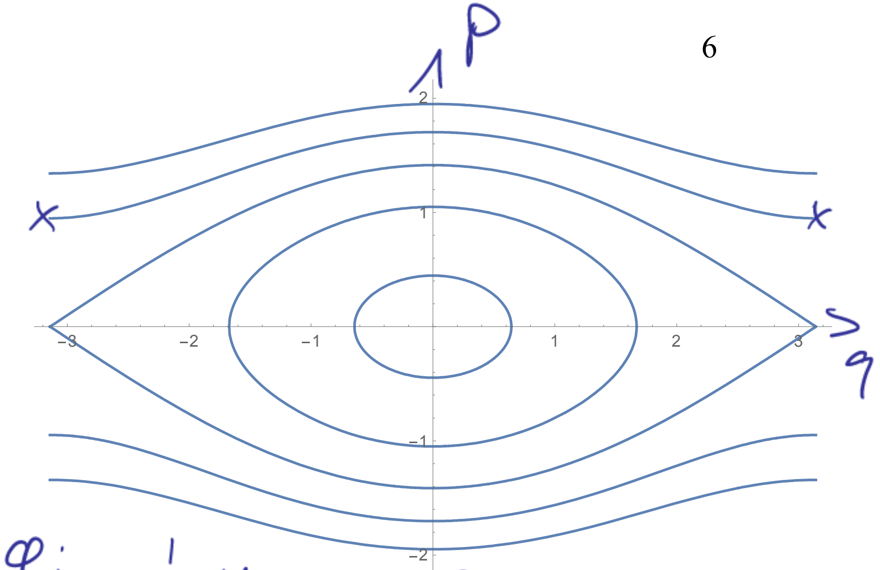
Beispiel: Starres Pendel

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = E = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos q$$

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2} \qquad m' = ml^2$$

$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} = -mgl\sin q$$

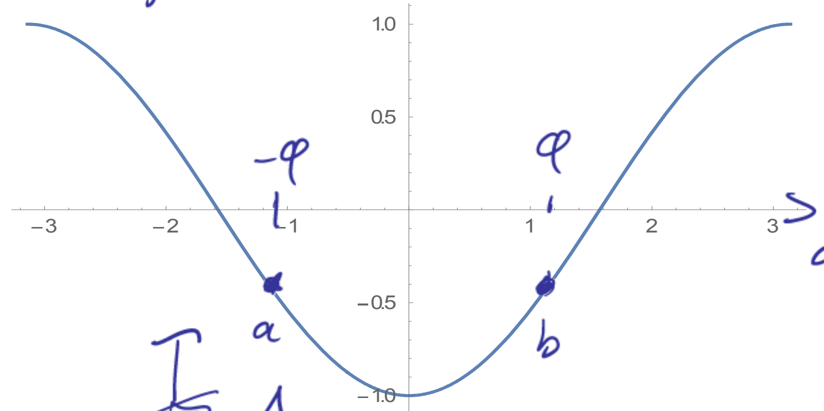




$$dt = \frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{2(E-V(q))}}\,dq$$

Umkehrpunkte bei $\pm\varphi$: $E = -mgl\cos\varphi$

$$\frac{1}{mgl}V(q) = -\cos q$$



$$\frac{1}{2}T = \int_{-\varphi}^{\varphi} dt = \int_{-\varphi}^{\varphi}\sqrt{\frac{\cancel{m}\,l^2}{2\cancel{m}gl(-\cos\varphi + \cos q)}}\,dq$$

$(E - V(q))$

$$= \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\varphi}^{\varphi}\frac{dq}{\sqrt{\cos q - \cos\varphi}}$$

siehe Elliptische Integrale

Entwicklung

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\varphi^2}{16} + \dots\right) \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{(1-\cos\varphi)}{8} + \dots\right)$$