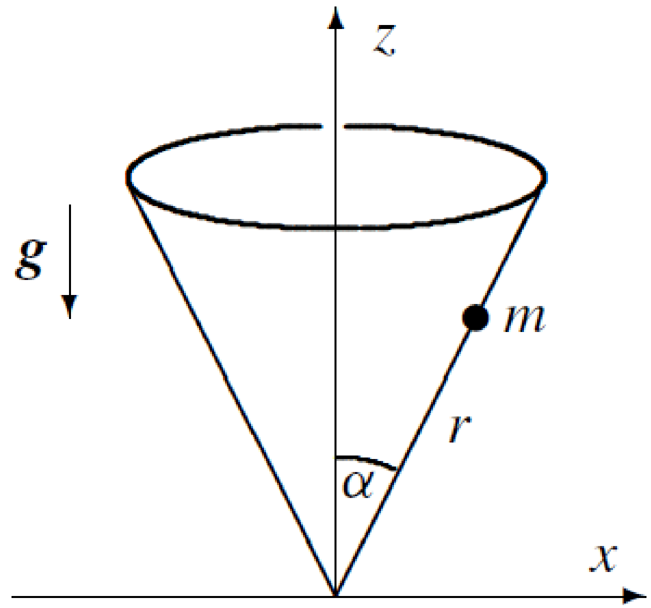
Übungen 7. Vorlesungswoche: Bitte einreichen bis 12.6.2023, 10:00 Uhr in Kästen (5. Stock, Gebäude 46).

8. (8 Punkte)

Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei im Schwerefeld auf der inneren Oberfläche eines Kreiskegels. Nutze zwei geeignete generalisierte Koordinaten um die Lagrange Funktion zu beschreiben. Bestimme die generalisierten Impulse und die Hamiltonfunktion. Stelle die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen auf. Welche Erhaltungsgrößen gibt es?



9. (7 Punkte)

Betrachte einen Massenpunkt in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) in einem zylindersymmetrischen Potential $V = a \ln \frac{r}{b}$ mit den Parametern a und b konstant. Stelle die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen auf. Welche Erhaltungsgrößen gibt es? Für welche Anfangsbedingung sind alle drei generalisierten Impulse erhalten?

Zusammenfassung **Hamilton Formalismus**

1.) Bilde Hamilton Funktion

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}} - L$$

2.) Stelle Hamilton'schen Bewegungsgleichungen auf

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad i = 1,\ldots,S\,,$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \qquad i = 1,\ldots,S\,,$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}\,.$$

3.) Lösen

Beispiel: Kleine Auslenkungen

$$L = T - V \approx \frac{1}{2}\left(\sum_{j,l} T_{jl}\dot{q}_j\dot{q}_l - \sum_{j,l} V_{jl} q_j q_l\right)$$

Generalisierte Impulse

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_l T_{jl}\dot{q}_l$$

Hamilton Funktion

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L = 2T - L = T + V = \frac{1}{2}\left(\sum_{j,l} T_{jl}^{-1} p_j p_l + \sum_{j,l} V_{jl} q_j q_l\right)$$

Bewegungsgleichungen

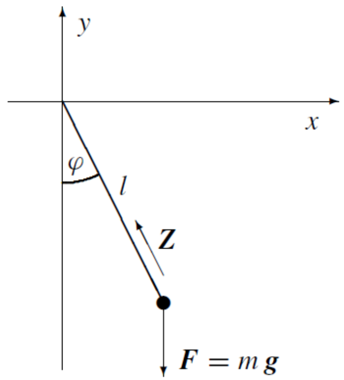
$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_l T_{jl}^{-1} p_l$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_l V_{jl} q_l$$

Beispiel: Starres Pendel

Generalisierte Koordinate $q = \varphi$

$$x = l \sin q \,; \quad y = l \cos q \,,$$
$$\dot{x} = l \dot{q} \cos q \,, \quad \dot{y} = -l \dot{q} \sin q$$



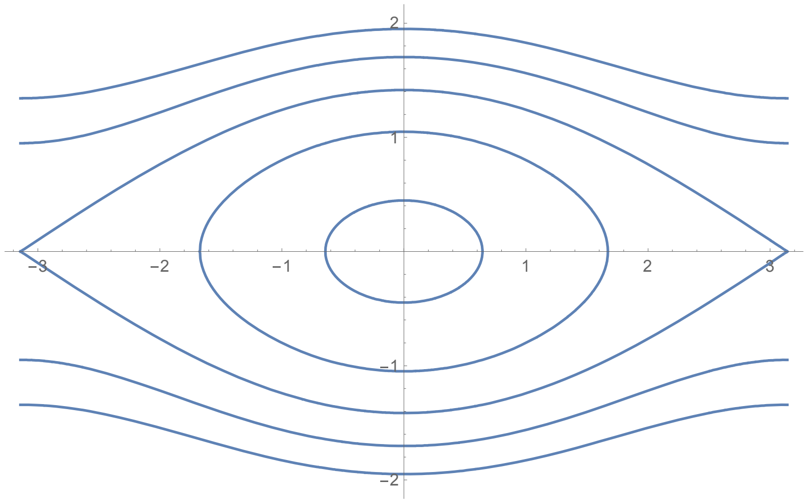
$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2 + m g l \cos q$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m l^2 \dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m l^2}$$

$$H = p \dot{q} - L = \frac{p^2}{2 m l^2} - m g l \cos q$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m l^2} \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = m l^2 \ddot{q}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m g l \sin q$$

Phasenraumbahnen: Alle Punkte im Phasenraum mit $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E$



Liouvilleschen Satz für sehr viele Massenpunkte:
Die Dichte der Systempunkte im Phasenraum ist zeitlich konstant.

Wann ist die Hamiltonfunktion die Gesamtenergie?

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_S, t) \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \right)^2 ,$$

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) ,$$

$$T_{jl} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l} \right)$$

Kinetische Energie allgemein

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{S} T_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l + \sum_{j=1}^{S} \alpha_j \dot{q}_j + \alpha$$

Generalisierte Impulse falls $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_l T_{jl} \dot{q}_l + \alpha_j$$

$$\sum_j \dot{q}_j p_j = \sum_{j,l} T_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l + \sum_j \alpha_j \dot{q}_j$$

$$H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L = \frac{1}{2} \sum_{j,l} T_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l + V - \alpha$$

Beispiel: Keine Zwangsbedingungen im beliebigen konservativen Potential

$$\mathbf{q} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N) = (q_1, q_2, \ldots, q_{3N})$$

$$L = T - V = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\left(m_{x,i}\dot{x}_i^2 + m_{y,i}\dot{y}_i^2 + m_{z,i}\dot{z}_i^2\right) - V(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N, t)$$

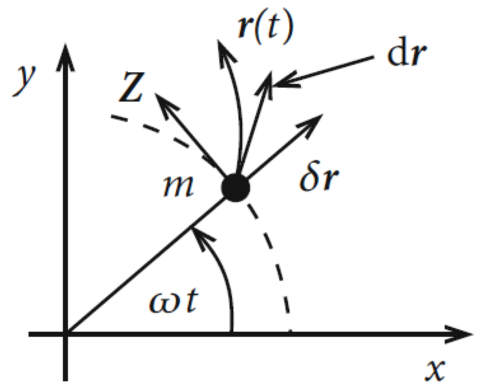
$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = m_j \dot{q}_j \qquad H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L = \sum_{j=1} \frac{p_j^2}{2m_j} + V$$

Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{p_j}{m_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Beispiel: Perle auf rotierendem Stab



1.) Rheonome Zwangsbedingungen

$$z = 0\,,$$

$$y = x\,\tan\omega t$$

2.) Generalisierte Koordinaten und Transformation

$$x = q\cos\omega t\,; \quad y = q\sin\omega t\,; \quad z = 0$$

3.) Lagrange Funktion

$$L = T - V = T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 + q^2\omega^2\right)$$

4.) Generalisierter Impuls und Hamilton Funktion

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \qquad H = \dot{q}p - L = \frac{p^2}{2m} - \frac{mq^2\omega^2}{2}$$

5.) Bewegungsgleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = mq\omega^2$$

$$q(t) = A\,e^{\omega t} + B\,e^{-\omega t}$$

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \bar{q}(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}) - \bar{q}\varphi$$

Beispiel: Geladenes Teilchen

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \bar{q}A_x$$

Generalisierte Impulse

Hamilton Funktion

$$H = \mathbf{r}\cdot\mathbf{p} - L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \bar{q}\varphi = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}-\bar{q}\mathbf{A})^2 + \bar{q}\varphi$$

Bewegungsgleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x - \bar{q}A_x}{m}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \bar{q}\left(\frac{1}{m}(\mathbf{p}-\bar{q}\mathbf{A})\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

FAZIT: