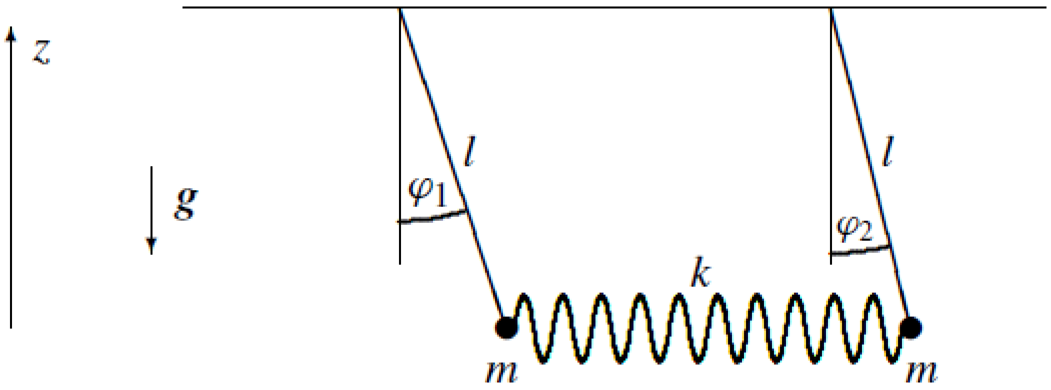
Übungen 6. Vorlesungswoche: Bitte einreichen bis 30.5.2023, 10:00 Uhr in Kästen (5. Stock, Gebäude 46). 10 Punkte

7. Betrachte zwei gekoppelte Pendel in der Abbildung mit einer „perfekten" Feder, die durch ein quadratisches Potential beschrieben wird. Die Feder sei entspannt, wenn beide Pendel sich im tiefsten Punkt befinden.



a.) Bestimme die vollständige Lagrange Funktion und die zugehörigen Bewegungsgleichungen.

b.) Bestimme die Matrizen V_{jl} und T_{jl} in der Näherung kleiner Auslenkungen. Berechne die Eigenfrequenzen und die zugehörigen Auslenkungen der Eigenmoden. Beschreibe die jeweilige Bewegung.

c.) Mache einen geeigneten Ansatz für die Rayleighsche Dissipationsfunktion um Reibung zu berücksichtigen. Wie ändern sich die Bewegungsgleichungen und die zeitabhängigen Lösungen für kleine Auslenkungen?

Schwingungen mit kleinen Auslenkungen: Lineare Näherung in der Nähe des Gleichgewichts

Annahme: Für jeden Massenpunkt gibt es eine stationäre Gleichgewichtsposition $\mathbf{q}^0$

Entwicklung in kleinen Auslenkungen $\mathbf{q}^0 + \mathbf{q}(t)$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{S} T_{jl}\, \dot{q}_j \dot{q}_l \qquad T_{jl} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l}\right)$$

Potentielle Energie:

$$V(\mathbf{q}^0 + \mathbf{q}(t)) \approx V(\mathbf{q}^0) + \sum_j \frac{\partial V}{\partial q_j} q_j + \frac{1}{2}\sum_{j,l} V_{jl} q_j q_k + \cdots \qquad V_{jl} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_l} = V_{lj}$$

Genäherte Lagrange Funktion

$$L = T - V \approx \frac{1}{2}\left(\sum_{j,l} T_{jl}\dot{q}_j \dot{q}_l - \sum_{j,l} V_{jl} q_j q_l\right)$$

Bewegungsgleichungen

$$L = T - V \approx \frac{1}{2}\left(\sum_{j,l} T_{jl}\dot{q}_j\dot{q}_l - \sum_{j,l} V_{jl}q_j q_l \right)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}{\partial \dot{q}_j}$$

$$-\sum_l V_{jl}q_l = \sum_l T_{jl}\ddot{q}_l$$

Ansatz: Eine Eigenmode schwingt mit der gleichen Frequenz für alle Auslenkungen der Koordinaten.
Jede Auslenkung wird durch eine Amplitude und Phase beschrieben $a_j = |a_j| e^{i\theta_j}$

$$q_j(t) = \mathrm{Re}[a_j \exp(i\omega t)]$$

$$\left(\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{T}\right)\cdot \mathbf{a} = 0$$

$$\mathbf{a} = \left(\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{T}\right)^{-1} \cdot 0$$

Charakteristisches Polynom für Eigenfrequenzen

$$\det\left(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}\right) = 0$$

Interpretation:

Neues Thema: Legendre Transformation und Hamilton Formalismus

$$a = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y$$

Es soll eine Funktion $A(x,y)$ gegeben sein, mit dem vollständigen Differential $\mathrm{d}A = a(x,y)\, dx + b(x,y)\, \mathrm{d}y$.

$$b = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x$$

Eine Legendre transformation definiert eine neue Größe

$$B = a\,x - A$$

Beachte: es gilt für das vollständige Differential $\mathrm{d}B = a\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}a - \mathrm{d}A = x\,\mathrm{d}a - b\,\mathrm{d}y$

Änderungen von B werden durch Änderungen von a und y beschrieben. Daher ist die Legendre Transformation eine Funktion von diesen Variablen $B(a,y)$.

Es gilt $x = \left(\frac{\partial B}{\partial a}\right)_y$ und $b = -\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_x$.

Beobachtung:

Die Hamilton Funktion $H(p,q) = p\dot{q} - L$ ist eine Legendre Transformation der Lagrange Funktion $L(q,\dot{q},t) = T - U$

$dL = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \dot{p} dq + p d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt$ mit dem generalisierten Impuls $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ und $\dot{p} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$

$$dH = d(p\dot{q}) - dL = p d\dot{q} + \dot{q} dp - \dot{p} dq - p d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \dot{q} dp - \dot{p} dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Vergleiche mit vollständigem Differential

$$dH = \dot{q} dp - \dot{p} dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt \overset{!}{=} \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Ergibt Hamilton’sche Bewegungsgleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Zusammenfassung **Hamilton Formalismus**

1.) Bilde Hamilton Funktion

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}} - L$$

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{S}(\dot{q}_i\,\mathrm{d}p_i - \dot{p}_i\,\mathrm{d}q_i) - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{S}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t$$

2.) Stelle Hamilton'sche Bewegungsgleichungen auf

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad i = 1,\ldots,S\,,$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \qquad i = 1,\ldots,S\,,$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}\,.$$

3.) Lösen

Beispiel: Kleine Auslenkungen

$$L = T - V \approx \frac{1}{2}\left(\sum_{j,l} T_{jl}\dot{q}_j\dot{q}_l - \sum_{j,l} V_{jl} q_j q_l\right)$$

Generalisierte Impulse

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_l T_{jl}\dot{q}_l$$

Hamilton Funktion

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L = 2T - L = T + V = \frac{1}{2}\left(\sum_{j,l} T_{jl}^{-1} p_j p_l + \sum_{j,l} V_{jl} q_j q_l\right)$$

Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_l T_{jl}^{-1} p_l$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_l V_{jl} q_l$$