Keine Übungen diese Woche.   Übungen 5 und 6 von letzter Woche bitte bis 22.5. einreichen.

<u>Verständnisfragen</u> für die Vorlesungen 1 bis 4 (z.B. für Klausurvorbereitung)

Vorlesung 1

1. Argumentiere mithilfe der Newtonschen Axiome, dass der Gesamtimpuls von N Massenpunkten erhalten ist wenn keine äußeren Kräfte wirken.
2. Argumentiere mithilfe der Newtonschen Axiome, dass der Gesamtdrehimpuls von N Massenpunkten erhalten ist wenn keine äußeren Kräfte wirken.
3. Was ist die mathematische Bedingung für die Definition von konservativen Kräften? Argumentiere mithilfe der Newtonschen Axiome, dass die Gesamtenergie von N Massenpunkten erhalten ist wenn nur konservative Kräfte wirken.
4. Betrachte das Beispiel von 2 Massenpunkten mit einer inneren Kraft. Was ist die reduzierte Masse? Was ist die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung? Was ist die kinetische Energie?
5. Was versteht man unter holonomen Zwangsbedingungen? Was sind generalisierte Koordinaten?
6. Was sind Zwangskräfte? Was kann man über die Richtung der Zwangskräfte aussagen?
7. Erkläre das Konzept der der virtuellen Arbeit. Was ist das d'Alembert'schen Prinzip?
8. Nutze das d'Alembert'schen Prinzip um die Lagrange Gleichungen für konservative Kräfte herzuleiten.
9. Was sind generalisierte Kraftkomponenten?

Vorlesung 2

10. Leite die Euler Lagrange Gleichung für ein Teilchen aus dem Minimierungsprinzip für das Wirkungsfunktional her .
11. Beschreibe das Brachistochronenproblem. und stelle ein Funktional für die Fallzeit für eine beliebige Bahnkurve y(x) von a nach b auf.
12. Was sind Zykloide?
13. Was ist das Hamiltonsches Prinzip? Was sind die Euler-Lagrange Gleichungen für s gereralisierte Koordinaten?
14. Was sind die Bewegungsgleichungen aus den Euler Lagrange Gleichungen für N Massenpunkte mit einem beliebiges Potential ohne Zwangsbedingungen?
15. Was versteht man unter einem verallgemeinerten Impuls und einer zyklischen Koordinate?
16. Wende die Euler Lagrange Gleichungen auf das Problem eines rotierenden Stabes mit einer frei gleitender Perle (1 Massenpunkt) an. Diskutiere die Bewegung.

Vorlesung 3

17. Was ist ein vollständiges Differential? Erkläre den Zusammenhang einer partiellen Ableitung und einer totalen Ableitung für eine Funktion von zwei Variablen.
18. Was sind die Euler Lagrange Gleichungen für die Bewegung auf einer Zykloide?
19. Wie ist die Hamilton-Funktion definiert? Unter welchen Bedingungen ist sie erhalten?
20. Zeige unter welchen Bedingungen die Hamilton-Funktion die Gesamtenergie beschreibt.
21. Was ist eine Symmetrie-Transformation? Was ist die zugehörige Symmetrie-Transformation für eine zyklische Koordinate?
22. Zeige dass es für eine beliebige Symmetrie-Transformation ein Integral der Bewegung gibt. (Noether Theorem)

Vorlesung 4

23. Bestimme das Integral der Bewegung für ein freies Teilchen mit Translationsinvarianz mithilfe des Noether Theorems.
24. Bestimme das Integral der Bewegung für ein freies Teilchen mit Rotationsinvarianz mithilfe des Noether Theorems.
25. Bestimme das Integral der Bewegung für ein freies Teilchen für eine spezielle Galilei-Transformation der Geschwindigkeit mithilfe des erweiterten Noether Theorems.
26. Welche Bedingung muss für ein verallgemeinertes Potential mit Geschwindigkeitsabhängigkeit gelten?
27. Was ist das verallgemeinerte Potential für ein geladenes Teilchen in einem Magnetfeld? Was gilt für das Vektorpotential? Was ist die Lagrange Funktion?
28. Bestimme die verallgemeinerten Impulse für ein geladenes Teilchen in einem Vektorpotential. Was ist der Unterschied zu mechanischen Impulsen?

Zusammenfassung Lagrange Methode für holonome Zwangsbedingungen:

Definiere Transformation zu generalisierten Koordinaten $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_S, t)$

Aus d'Alembert'schen Prinzip $\sum_i \boldsymbol{Z}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$ **folgt** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \mathrm{Q}_j \equiv \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{K}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$

Alternative Herleitung aus notwendiger Bedingung für minimales $\int_1^{t_2} \delta(T - W)\,\mathrm{d}t \overset{!}{=} 0$ **Wirkungsfunktional**

wobei virtuelle Arbeit

$$-\delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{K}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{S} \boldsymbol{K}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{S} \mathrm{Q}_j \delta q_j$$

Fall 1): Konservative Kräfte

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_{\nu,\mathrm{kons}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_\nu = -\frac{dU(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N)}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_\nu$$

Fall 2) Verallgemeinertes Potential $U = U(q_1, \ldots, q_S, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_S, t)$ mit $\mathrm{Q}_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, S$

In Fall 1 und 2): Lagrange Funktion $L = T - U$ gibt Bewegungsgleichungen $\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j}$

Fall 3) Sonstige Kräfte (Reibung, Dissipation) $\mathrm{Q}_j \equiv \sum_{i=1}^{N} K_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \mathrm{Q}_j^{(V)} + \mathrm{Q}_j^{(R)}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \mathrm{Q}_j^{(R)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(R)}$$

Anwendung: Reibungskräfte und Dissipationsfunktion D

Energieänderung

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_j p_j \dot{q}_j\right) - \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_j p_j \dot{q}_j\right) - \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_j p_j \dot{q}_j\right) - \frac{d}{dt}\left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) + \sum_j Q_j^{(R)}\dot{q}_j = \sum_j Q_j^{(R)}\dot{q}_j$$

Für Stokes'sche Reibung:

Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{S} \beta_{lm}\dot{q}_l\dot{q}_m$$

Dann $Q_j^{(R)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = -\sum_j \beta_{jl}\dot{q}_l$

Somit $$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}(T+V) = -2D$$

Beispiel: Fall mit Stokes'scher Reibung

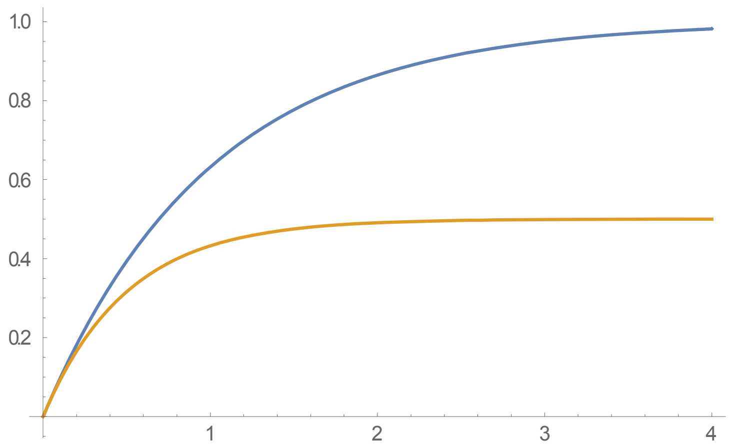
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(R)}$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha\, \dot{z}^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\ \dot{z}^2 - mgz$$

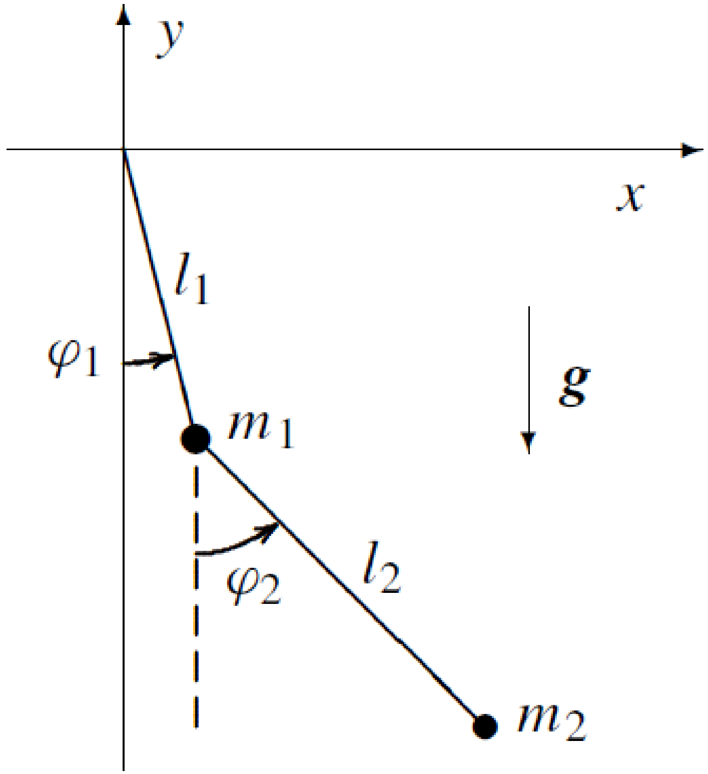
$$m\ddot{z} + mg + \alpha\dot{z} = 0$$

$$-\dot{z} = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t/m}\right)$$



Beispiel: Doppelpendel

$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1 \qquad x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$$
$$y_1 = -l_1 \cos\varphi_1 \qquad y_2 = -l_1 \cos\varphi_1 - l_2 \cos\varphi_2$$



Kinetische Energie

$$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2\right) =$$
$$= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left[l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2\right]$$

Potentielle Energie

$$U = m_1 g\, y_1 + m_2 g\, y_2$$

$L = T - U$

Lagrange Funktion

$$L=T\text{-}U = \frac{m_1+m_2}{2}\, l_1^2\, \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\, l_2^2\, \dot{\varphi}_2^2 + m_2\, l_1\, l_2\, \dot{\varphi}_1\, \dot{\varphi}_2\, \cos(\varphi_1-\varphi_2)$$
$$+ (m_1+m_2)\, g\, l_1 \cos\varphi_1 + m_2\, g\, l_2 \cos\varphi_2$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}{\partial \dot{q}_j}$$

Bewegungsgleichungen Doppelpendel

$$-(m_1+m_2)gl_1 \sin\varphi_1 - m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 = \frac{d}{dt}\Big((m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_2\Big)$$

$$-m_2 g l_2 \sin\varphi_2 + m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 = \frac{d}{dt}\Big(m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\Big)$$

Kleine Auslenkungen

$$-(m_1+m_2)gl_1\varphi_1=\frac{d}{dt}\Big((m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2\Big)$$

$$-m_2gl_2\varphi_2=\frac{d}{dt}\Big(m_2l_2^2\dot{\varphi}_2+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\Big)$$