Übungen 4. Vorlesungswoche: Bitte einreichen bis 22.5.2023, 10:00 Uhr in Kästen (5. Stock, Gebäude 46)

5. (7 Punkte) Betrachte ein Teilchen unter Einfluss der Gravitation $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - mgx$

Berechne L^α für eine Spezielle Galilei-Transformation $x^\alpha = x + \alpha t$.

Bestimme f so dass $\frac{d}{d\alpha}L^\alpha = \frac{df}{dt}$

Was ist die entsprechende Erhaltungsgröße? Was bedeutet das für die Bewegung?

6. (8 Punkte) Bestimme die allgemeine Hamiltonfunktion eines geladenen Teilchens $H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L$ in einem elektromagnetischen Potential als Funktion der Position und der Geschwindigkeit. Drücke dann die Hamiltonfunktion mithilfe der generalisierten Impulse aus. Entspricht die Hamiltonfunktion der Gesamtenergie des Teilchens? Wie hängt die Hamiltonfunktion vom Vektorfeld ab?

Last week: **Noether Theorem:**

kontinuierliche „Symmetrietransformation“ der Koordinaten $\mathbf{q}^{\alpha}(\mathbf{q},t)$ mit $\mathbf{q}^{\alpha=0}(t)=\mathbf{q}(t)$ und $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=L(\mathbf{q}^{\alpha},\dot{\mathbf{q}}^{\alpha},t) \quad \forall t,\alpha$

Integral der Bewegung $$I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=\sum_{j=1}^{s} p_j^{\alpha}\left.\frac{\partial q_j^{\alpha}}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j^{\alpha}}\left.\frac{\partial q_j^{\alpha}}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$$

Beispiel Freies Teilchen: $L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$

1.) Translationsinvarianz

$$x^{\alpha_1}=x+\alpha_1$$
$$y^{\alpha_2}=y+\alpha_2$$
$$z^{\alpha 3}=z+\alpha_3$$

Erhaltungsgröße

$$I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=\sum_{j=1}^{s} p_j^\alpha \left.\frac{\partial q_j^\alpha}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j^\alpha}\left.\frac{\partial q_j^\alpha}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$$

2.) Rotationsinvarianz

Um x-Achse

$$\begin{pmatrix} x^\alpha \\ y^\alpha \\ z^\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left.\begin{pmatrix} x^\alpha \\ y^\alpha \\ z^\alpha \end{pmatrix}\right|_{\alpha=0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Erhaltungsgröße

Um y-Achse und z-Achse

$$\begin{pmatrix} x^\alpha \\ y^\alpha \\ z^\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^\alpha \\ y^\alpha \\ z^\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Alternativ: zyklische Koordinate $L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$

Lie Algebra und allgemeine Rotationen

$$I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \sum_{j=1}^{s} p_j^\alpha \left.\frac{\partial q_j^\alpha}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j^\alpha} \left.\frac{\partial q_j^\alpha}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$$

3.) Spezielle Galilei-Transformation

$$x^\alpha = x + \alpha t$$

$$\dot{x}^\alpha = \dot{x} + \alpha$$

$$L^\alpha = \frac{m}{2}((\dot{x}+\alpha)^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = L + m\alpha\dot{x} + \frac{m\alpha^2}{2}$$

$$\frac{d}{d\alpha} L^\alpha = m(\dot{x}+\alpha) = \frac{df}{dt}$$

Erhaltungsgröße

$$I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \sum_{j=1}^{s} p_j^\alpha \frac{\partial q_j^\alpha}{\partial \alpha} - f = m\dot{x}t - mx$$

Bisher: nur konservatives Potential

Laut Herleitung aus $\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{K}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$

in Vorlesung 1-7 und 1-8 gilt generell für die **verallgemeinerten Kraftkomponenten**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \equiv \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{K}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

Definition: Ein verallgemeinertes Potential $U = U(q_1, \ldots, q_S, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_S, t)$

muss folgende Bedingung erfüllen

$$Q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, S$$

Die Bewegungsgleichungen werden durch die verallgemeinerte Lagrange Funktion $L = T - U$ gebildet

$$\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j}$$

Beispiel: Lorentz Kraft und Vektorpotential

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$$

Entlang x-Richtung

$$F_x = q(E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y) \stackrel{?}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x}$$

Ansatz für Geschwindigkeitsabhängigkeit:

$$U = q(\varphi - \dot{x}A_x)$$

$$F_x = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x} = -q\frac{d}{dt}A_x - q\frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \dot{x}A_x)$$

Spezialfall: Statisches Magnetfeld unabhängig von x, dann mögliche Lösung $A_x = yB_z - zB_y$

Allgemeiner: Beschreibung mit skalarem Potential und **Vektorpotential** $U = q(\varphi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})$

Behauptung: Dieses verallgemeinerte Potential ergibt Lorentz Kraft mit folgenden Feldern

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\,; \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

Bemerkung: Die homogenen Maxwell Gleichungen sind dann automatisch erfüllt $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = 0\,;$ $\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0\,;$

- $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \vec{0}$
- $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$
- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F}$

Berechnung allgemein

$$F_x = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x} = -q\frac{d}{dt}A_x - q\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi - \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}\right)$$

Felder

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}A_x =$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}\right) =$$

Somit:

$$F_x = q(E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y)$$

Fazit: Allgemeine elektromagnetische Lagrange Funktion für ein geladenes Teilchen

$$L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 + q\,(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}) - q\,\varphi$$

ACHTUNG: Die generalisierten Impulse sind nicht die kinetischen Impulse

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\,\dot{x} + q\,A_x$$