Übungen 4. Vorlesungswoche: Bitte einreichen bis 22.5.2023, 10:00 Uhr in Kästen (5. Stock, Gebäude 46)

5. (7 Punkte) Betrachte ein Teilchen unter Einfluss der Gravitation $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - mgx$

Berechne L^α für eine Spezielle Galilei-Transformation $x^\alpha = x + \alpha t$.

Bestimme f so dass $\frac{d}{d\alpha}L^\alpha = \frac{df}{dt}$

Was ist die entsprechende Erhaltungsgröße? Was bedeutet das für die Bewegung?

6. (8 Punkte) Bestimme die allgemeine Hamiltonfunktion eines geladenen Teilchens $H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L$ in einem elektromagnetischen Potential als Funktion der Position und der Geschwindigkeit. Drücke dann die Hamiltonfunktion mithilfe der generalisierten Impulse aus. Entspricht die Hamiltonfunktion der Gesamtenergie des Teilchens? Wie hängt die Hamiltonfunktion vom Vektorfeld ab?

Last week: **Noether Theorem:**

kontinuierliche „Symmetrietransformation" der Koordinaten $\mathbf{q}^{\alpha}(\mathbf{q},t)$ mit $\mathbf{q}^{\alpha=0}(t)=\mathbf{q}(t)$ und $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=L(\mathbf{q}^{\alpha},\dot{\mathbf{q}}^{\alpha},t) \quad \forall t,\alpha$

Integral der Bewegung $$I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=\sum_{j=1}^{s} p_j^{\alpha} \left.\frac{\partial q_j^{\alpha}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j^{\alpha}} \left.\frac{\partial q_j^{\alpha}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}$$

Wir kennen:

3 zyklische Variablen

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial z}=0$$

$$\frac{d}{dt}p_x=\dot{p}_y=\dot{p}_z=0$$

Beispiel Freies Teilchen: $L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$

Neu!

1.) Translationsinvarianz

$x^{\alpha_1}=x+\alpha_1$

$y^{\alpha_2}=y+\alpha_2$

$z^{\alpha 3}=z+\alpha_3$

Erhaltungsgröße z.B für α_1

$$I_1=\underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \alpha_1}}+\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\cancelto{0}{\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial \alpha_1}}+\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\cancelto{0}{\frac{\partial z^{\alpha}}{\partial \alpha_1}} = m\dot{x}\cdot 1 = p_x$$

+ beliebige Linearkombinationen

und p_x, p_y, p_z

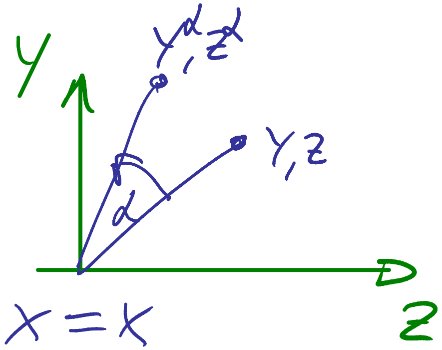
$$I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=\sum_{j=1}^{s} p_j^\alpha \frac{\partial q_j^\alpha}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j^\alpha}\frac{\partial q_j^\alpha}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}$$

$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

2.) Rotationsinvarianz

Um x-Achse

$$\begin{pmatrix} x^\alpha \\ y^\alpha \\ z^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$x = x$

$y^\alpha = y\cos\alpha - z\sin\alpha$

$z^\alpha = y\sin\alpha + z\cos\alpha$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\begin{pmatrix} x^\alpha \\ y^\alpha \\ z^\alpha \end{pmatrix}_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial y^\alpha}{\partial\alpha} = -z, \; \frac{\partial z^\alpha}{\partial\alpha} = y$

$L^\alpha = L$

$\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2 = (\dot x^\alpha)^2+(\dot y^\alpha)^2+(\dot z^\alpha)^2$

Erhaltungsgröße $I_x = \frac{\partial L}{\partial \dot x}\cancel{\frac{\partial x^\alpha}{\partial\alpha}}^{0} + \frac{\partial L}{\partial \dot y}\frac{\partial y^\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot z}\frac{\partial z^\alpha}{\partial\alpha} = -z\, m\dot y + y\, m\dot z = yp_z - zp_y$

$= L_x$ Drehimpuls

Um y-Achse und z-Achse

$$\begin{pmatrix} x^\alpha \\ y^\alpha \\ z^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow L_y$$

$$\begin{pmatrix} x^\alpha \\ y^\alpha \\ z^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow L_z$$

Lie Algebra und allgemeine Rotationen R

$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrix $R = \exp(n_x J_x + n_y J_y + n_z J_z)$

$= \exp(\vec{n}\cdot\vec{J}_x)$

Achse $\vec{n} = \Theta\hat{n}$ um Winkel Θ

Alternativ: zyklische Koordinate $L=\frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\dot\varphi^2\sin^2\theta)$

wo eine zyklische Koordinate $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$

3.) Spezielle Galilei-Transformation mit konst. Geschwindigkeit α

$$I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=\sum_{j=1}^{s} p_j^\alpha \left.\frac{\partial q_j^\alpha}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j^\alpha}\left.\frac{\partial q_j^\alpha}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}-f$$

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

$$x^\alpha = x+\alpha t$$

$$\dot{x}^\alpha = \dot{x}+\alpha$$

$$L(x^\alpha,y,z)=L^\alpha=\frac{m}{2}((\dot{x}+\alpha)^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=L+m\alpha\dot{x}+\frac{m\alpha^2}{2}$$

$$\frac{d}{d\alpha}L^\alpha = m(\dot{x}+\alpha)=\frac{df}{dt}$$

$$=\frac{d}{d\alpha}\left(m\alpha\dot{x}+\frac{m\alpha^2}{2}\right)$$

wähle $f=mx+m\alpha t$

Erhaltungsgröße

$$I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=\sum_{j=1}^{s} p_j^\alpha \frac{\partial q_j^\alpha}{\partial \alpha}-f\Big|_{\alpha=0}=m\dot{x}t-mx$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}=\frac{\partial z}{\partial \alpha}=0$$

$$=\left(p_x^\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \alpha}-f\right)_{\alpha=0}=pt-mx=m\dot{x}t-mx$$

(Bemerkung: auch für beliebige α)

$x-\dot{x}t=x_0$ ist eine Erhaltungsgröße

$$x=x_0+\dot{x}t$$

4. Vorlesungswoche: Verallgemeinerte Potentiale und Kraftkomponenten

Neu: - zeitabhängig (kein Problem)
- Geschwindigkeitsabhängig (z.B. für Lorentz Kraft)

Bisher: nur konservatives Potential $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(q_1 \ldots q_S)$

Laut Herleitung aus $\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{K}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$

in Vorlesung 1-7 und 1-8 gilt generell für die **verallgemeinerten Kraftkomponenten**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \equiv \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{K}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

Summe der Kräfte projeziert entlang q_j

Definition: Ein verallgemeinertes Potential $U = U(q_1, \ldots, q_S, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_S, t)$

neue mathematische Bedingung

muss folgende Bedingung erfüllen

$$Q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, S$$

dann $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial U}{\partial q}$

d.h. Die Bewegungsgleichungen werden durch die verallgemeinerte Lagrange Funktion $L = T - U$ gebildet

$$\frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}{\partial \dot{q}_j}$$

$-\frac{\partial U}{\partial q_i}$ wie zuvor für kons. Kräfte

$\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}}$ soll den Geschwindigkeits-abhängigen Teil beschreiben hier q ist Ladung (keine Koordinate)

Beispiel: Lorentz Kraft und Vektorpotential $\quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$

Frage: kann zu Geschw. abhängiger Kraft ein U definiert

Entlang x-Richtung $\quad F_x = q(E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y) \overset{?}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x}$ $\quad **$

Ansatz für Geschwindigkeitsabhängigkeit: $\quad U = q(\varphi - \dot{x}A_x)$

φ und A sollen nur von Koordinaten x, y, z abhängen

$$F_x = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x} = -q\frac{d}{dt}A_x - q\frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \dot{x}A_x) \quad *$$

Vgl $*$ mit $**$

Spezialfall: Statisches Magnetfeld unabhängig von x, dann mögliche Lösung $\quad A_x = yB_z - zB_y$

dann $F_x = -q(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y) - q\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $\quad$ umgekehrt $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$

Allgemeiner: Beschreibung mit skalarem Potential φ und **Vektorpotential** $\vec{A}$ $\quad U = q(\varphi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})$

Behauptung: Dieses verallgemeinerte Potential ergibt Lorentz Kraft mit folgenden Feldern

$$\boldsymbol{B} = \text{rot}\,\boldsymbol{A}\,; \quad \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

$\varphi, \vec{A}$ können immer bestimmt werden (modulo eines Gradientenfeldes)

Bemerkung: Die homogenen Maxwell Gleichungen sind dann automatisch erfüllt $\text{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = 0\,; \quad \text{div}\,\boldsymbol{B} = 0\,;$

- $\text{rot}(\text{grad}\,U) = \vec{0}$
- $\text{div}(\text{rot}\,\vec{F}) = 0$
- $\text{rot}(\text{rot}\,\vec{F}) = \text{grad}(\text{div}\,\vec{F}) - \Delta\vec{F}$

$\varphi(x,y,z,t)$
$\vec{A}(x,y,z,t)$

$$U = q(\varphi - \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A})$$

einzige Abh. der Geschwindigkeit

$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$

$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

Berechnung allgemein

$$F_x = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x} = -q\frac{d}{dt}A_x - q\frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A})$$

Felder

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}A_x = \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}) = \dot{\vec{r}}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} = \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$F_x = -q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) - q\left[\dot{x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \dot{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) + \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]$$

$$= E_x q + q(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y)$$

Somit:

$$F_x = q(E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y)$$

Allgemein: $\vec{F} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}}\times\vec{B})$

$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$

Fazit: Allgemeine elektromagnetische Lagrange Funktion für ein geladenes Teilchen

$U = q(\varphi - \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A})$

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + q(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}) - q\varphi = T - U(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + q(\dot{x}A_x+\dot{y}A_y+\dot{z}A_z) - q\varphi$$

Bewegungsgl.

ACHTUNG: Die generalisierten Impulse sind nicht die kinetischen Impulse

= mechanische Impulse

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x \neq m\dot{x}$$

$\vec{q} = (x,y,z)$

$$p_y = m\dot{y} + qA_y \neq m\dot{y}$$

$$p_z = m\dot{z} + qA_z \neq m\dot{z}$$

falls $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = \frac{dp_x}{dt} = m\ddot{x} + q\frac{dA_x}{dt}$ (x zyklisch

dann p_x erhalten