Übungen 3. Vorlesungswoche (10 Punkte): Bitte einreichen bis 8.5.2023, 10:00 Uhr in Kästen (5. Stock, Gebäude 46)

4a.) Betrachte zwei Massenpunkte mit einer Lagrange Funktion

$$L = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2\right) - V\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right]$$

Das Potential wird in diesem Fall Zentralfeld genannt (warum?). Obwohl es keine Zwangsbedingungen gibt, ist es sinnvoll folgende generalisierte Koordinaten einzuführen

$$(X, Y, Z) := \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{R}$$

$$r(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$$

Zeige explizit, dass dann mithilfe dieser Definition und der reduzierten Masse μ (siehe Vorlesung)

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - V(r)$$

Welche der Koordinaten sind zyklisch? Welche Erhaltungsgrößen (generalisierte Impulse) gibt es?

b.) Betrachte ein Teilchen mit Lagrange Funktion $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x^2 + y^2, z)$

Argumentiere mithilfe von zylindrischen Koordinaten, dass es auch in diesem Fall eine Drehimpulserhaltung gibt. Was ist der Unterschied zur Relativbewegung in Teil a)?

Ankündigung Termine:

Tutorial: Im Raum 46/260 Freitags um 13:45 am **28.4., 5.5., 19.5., 2.6., 9.6., 30.6., 14.7.**

Klausur: Freitag 21.7.2023 in Raum 46/260.
Anmeldung bis 14.7. via e-mail. **Für Lehramt zusätzlich für die Modulprüfung beim Prüfungsamt im offiziellen Anmeldezeitraum.**

„Erinnerung“:
Definition: Vollständiges Differential (oder totales Differential)

Betrachte eine Größe A, die sich mit zwei anderen Variablen x und y ändert

Die infinitesimale Änderung $\mathrm{d}A = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,\mathrm{d}y$ ist vollständig, falls eine Funktion $A(x,y)$ existiert so dass

$$\mathrm{d}A = A(x+\mathrm{d}x,\, y+\mathrm{d}y) - A(x,y)$$

Die Größen $a(x,y)$ und $b(x,y)$ sind dann durch folgende partielle Ableitungen gegeben

$$a = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y \qquad\qquad b = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x$$

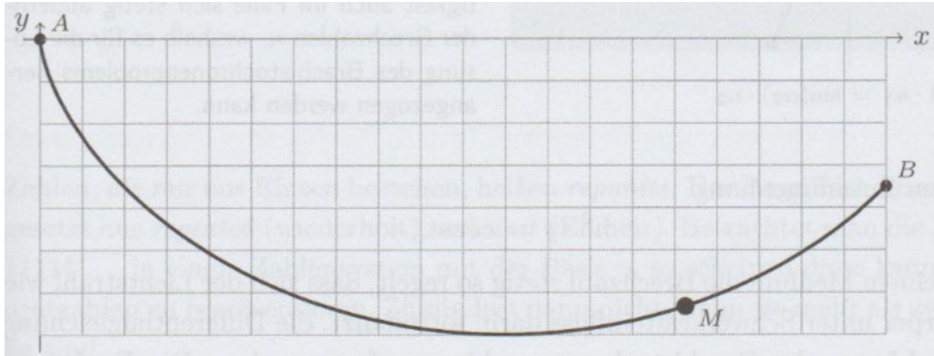
Beispiel: Bewegung auf der Zykloide

$$x = r(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = r(1-\cos\varphi) = 2r\sin^2(\varphi/2)$$

Hier: Bahn ist bekannt und vorgegeben. Der zeitliche Ablauf muss durch eine Bewegungsgleichung bestimmt werden.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$$

Was ist die geeignete generalisierte Koordinate?



Erhaltung bei zeitunabhängiger Lagrange Funktion $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L = \sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) = \sum_{j=1}^{S}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{S}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j$$

Definition: Generalisierter Impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Definition: Hamilton Funktion

$$H = \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j - L$$

„Spezialfall": zeitunabhängige generalisierte Koordinaten und geschwindigkeitsunabhängiges Potential $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_S, t) \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{S} \mu_{jl}\, \dot{q}_j\, \dot{q}_l \qquad \mu_{jl} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l} \right)$$

$$2T = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_j p_j \dot{q}_j$$

$H = T + V = E$ **Gesamtenergie**

Zyklische Koordinate falls $$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Der zugehörige Impuls ist erhalten $$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} p_j = 0$$

Definition: Ein Integral der Bewegung ist eine Größe die konstant bleibt $F_r\left(q_1, \ldots, q_S, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_S, t\right) = c_r$

Beobachtung:

Eine kontinuierliche Transformation $q_j^\alpha = q_j + \alpha$ einer zyklischen Koordinate lässt die Lagrange Funktion invariant.

Definition: Eine „**Symmetrietransformation**" der Koordinaten $\mathbf{q}^\alpha(\mathbf{q}, t)$ lässt die Lagrange Funktion invariant

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}^\alpha, \dot{\mathbf{q}}^\alpha, t) \quad \forall \alpha, t$$

- Sie können kontinuierlich oder diskret sein.
- Sie bilden eine Gruppe
  (Verknüpfungen von Transformationen sind assoziativ und abgeschlossen, es gibt ein Neutrales Element, es gibt ein Inverses Element)
- Beispiele für Untergruppen: Drehung $\mathrm{O}(3)$, Translation $\mathrm{U}(1)$, Spiegelung Z_2

Noether Theorem

Für jede kontinuierliche „Symmetrietransformation“ der Koordinaten $\mathbf{q}^{\alpha}(\mathbf{q},t)$ mit $\mathbf{q}^{\alpha=0}(t)=\mathbf{q}(t)$ und

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=L(\mathbf{q}^{\alpha},\dot{\mathbf{q}}^{\alpha},t) \quad \forall t,\alpha$$

gibt es ein entsprechendes **Integral der Bewegung**

$$I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=\sum_{j=1}^{s} p_j^{\alpha} \left.\frac{\partial q_j^{\alpha}}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j^{\alpha}} \left.\frac{\partial q_j^{\alpha}}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$$