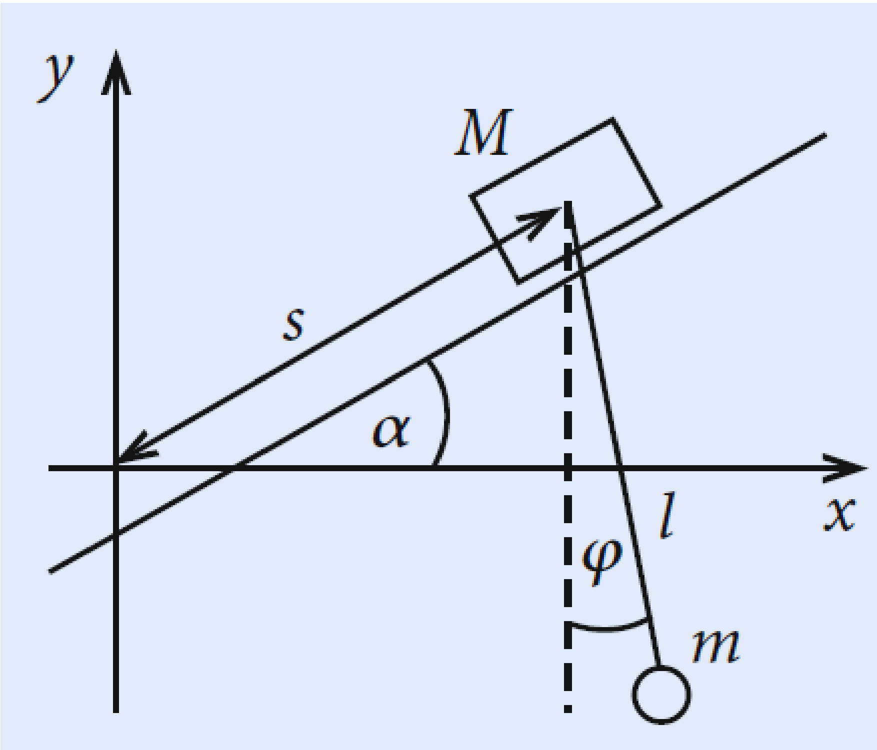
Übungen 2. Vorlesungswoche (10 Punkte): Bitte einreichen bis 2.5.2023, 10:00 Uhr in Kästen (5. Stock, Gebäude 46)

3.) Ein Block der Masse M gleite reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α gegen die Horizontale. An seinem Schwerpunkt sei die Masse m über einen masselosen Faden der Länge l befestigt.

a) Wie lautet die Lagrange-Funktion $L(\varphi, s, \dot{\varphi}, \dot{s})$?
b) Zeigen Sie, dass eine Lösung $\varphi(t) = \varphi(0) = \text{const}$ existiert (Gleichgewichtsposition).
c) Geben Sie eine geschlossene Differentialgleichung für φ an. Lösen Sie diese für $M \gg m$ und kleine Winkelausschläge ($\varphi \approx \alpha$).



Behauptung: Bei holonomen Zwangsbedingungen lauten die Bewegungsgleichungen für generalisierte Koordinaten

Definition: Lagrange Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-V)=\frac{\partial}{\partial q_j}(T-V)$$

wobei die kinetische und potentielle Energie als Funktion der generalisierten Koordinaten durch die Transformation $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, \ldots, q_S, t)$ bekannt sind

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \qquad \boldsymbol{K}_i = -\nabla_i V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$$

1. Zwangsbedingungen formulieren.
2. Generalisierte Koordinaten $\boldsymbol{q}$ festlegen.
3. Transformationsformeln bilden.
4. Lagrange-Funktion $L = T - V = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ aufstellen.
5. Lagrange-Gleichungen ableiten und lösen.
6. Rücktransformation auf $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$ Koordinaten.

Zusammenhang mit allgemeinen **Minimierungsproblemen**: **Variationsrechnung und Extremwertaufgabe**

Gesucht ist eine Funktion $y(x)$, so dass folgendes „Funktional“ minimal wird:

$$S[y(t)] = \int_a^b dt\, L(y,\dot{y},t)$$

Randbedingung: $y(t_a) = y_a;\ y(t_b) = y_b$

Minimal wenn jede Änderung von der optimalen Funktion $y_0(t)$ zu einer Erhöhung von S führt

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon\eta(t)$$

$$\delta S = S[y(t)] - S[y_0(t)] \geq 0 \quad \forall\, \eta(t)$$

Notwendige Bedingung für Minimum → Erste Ableitung verschwindet.

$$0 \stackrel{!}{=} \left.\frac{dS}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b dt \left(\frac{\partial L(y,\dot{y},t)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L(y,\dot{y},t)}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}$$

wobei $\dfrac{\partial y(t)}{\partial \varepsilon} = \eta(t)$ und $\dfrac{\partial \dot{y}(t)}{\partial \varepsilon} = \dot{\eta}(t)$

Nutze partielle Integration:

$$\int_a^b dt \left(\frac{\partial L(y,\dot{y},t)}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = -\int_a^b dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(y,\dot{y},t)}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \left[\frac{\partial L(y,\dot{y},t)}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \right]_a^b$$

wobei $\frac{\partial y(t)}{\partial \varepsilon} = \eta(t)$ und $\frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial \varepsilon} = \dot{\eta}(t)$

Daher:

$$0 \overset{!}{=} \left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b dt \left(\frac{\partial L(y,\dot{y},t)}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(y,\dot{y},t)}{\partial \dot{y}} \right) \eta(t) \quad \forall\, \eta(t)$$

Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\partial L(y,\dot{y},t)}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L(y,\dot{y},t)}{\partial \dot{y}}$$

Historischer Exkurs: **Brachistochrone** ist die Bahn auf der ein Massenpunkt von a nach b am schnellsten reibungsfrei „rutscht“

1.) Stelle ein Funktional auf, das die Zeit als Abhängigkeit der Bahn y(x) berechnet

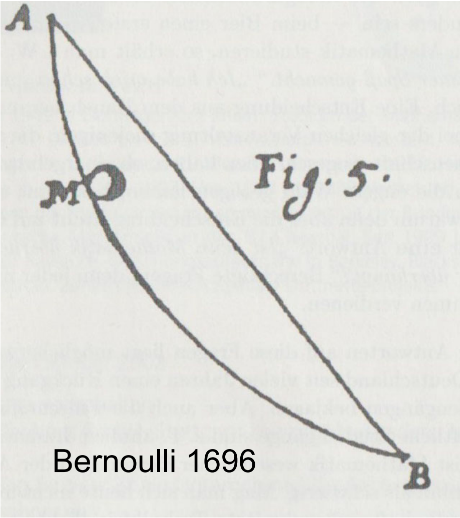
Nutze: $\tau = \int \frac{ds}{v}$ wobei $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$

und $\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}$

Somit $\tau = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx =: \int_a^b f(y, y')\, dx$

2.) Bestimme Differentialgleichung $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$

Nach Umformungen: $\frac{\partial f}{\partial x}$ = $\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$



Bernoulli 1696

3.) Bestimme Lösung aus Erhaltungsgröße der Bewegung $f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{4rg}}$

Parametrische Lösung: Zykloide $\begin{aligned} x &= r(\varphi - \sin\varphi) \\ y &= r(1 - \cos\varphi) \end{aligned}$

Definition: Lagrange Funktion

$$L = T - V = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \right) - V\left(x_1, \ldots, z_N, t\right) = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$$

Gegeben: Transformation $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i\left(q_1, \ldots, q_S, t\right)$

Definition: Wirkung

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_a^b dt\; L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

Definition: Hamiltonsches Prinzip

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,\left(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t\right)\,\mathrm{d}t \stackrel{!}{=} 0$$

Definition: Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j}$$

1. Beispiel: Keine Zwangsbedingungen im beliebigen konservativen Potential

$\mathbf{q} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N)$

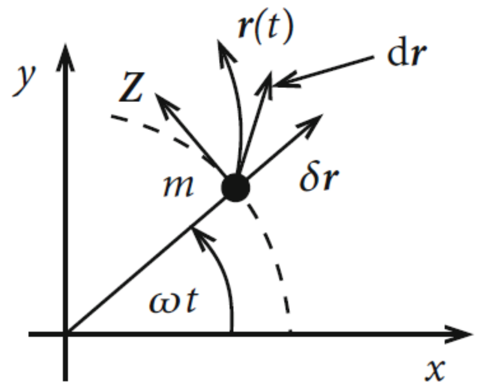
$$L = T - V = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \right) - V \left(x_1, \ldots, z_N, t \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_{x_i}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \ddot{x}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \Leftrightarrow m_i \ddot{x}_i = F_{x_i}$$

2. Beispiel: Perle auf rotierendem Stab



1.) Rheonome Zwangsbedingunger

$$z = 0\,,$$

$$y = x\,\tan\omega t$$

2.) Generalisierte Koordinaten und 3.) Transformation

$$x = q\,\cos\omega t\,; \quad y = q\,\sin\omega t\,; \quad z = 0$$

4.) Lagrange Funktion

$$L = T - V = T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 + q^2\omega^2\right)$$

5.) Euler Langrange Gleichung und Lösung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\,\ddot{q} = \frac{\partial L}{\partial q} = m\,q\,\omega^2$$

$$q(t) = A\,\mathrm{e}^{\omega t} + B\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

6.) Rücktransformation und Diskussion

$$x = q\cos\omega t\,; \quad y = q\sin\omega t\,; \quad z = 0$$