14. Vorlesungswoche: Relativistische Lagrange und Hamiltonfunktionen, Viererverktoren

Verständnisfragen für die Vorlesungen 12 bis 14 (Spezielle Relativitätstheorie)

Vorlesung 12

66. Beschreibe das Michelson Morley Experiment (ohne Rechnungen). Was wird beobachtet?
67. Erläutere die Lorentztransformation. Welche Größe bei der Transformation bleibt erhalten?

Vorlesung 13

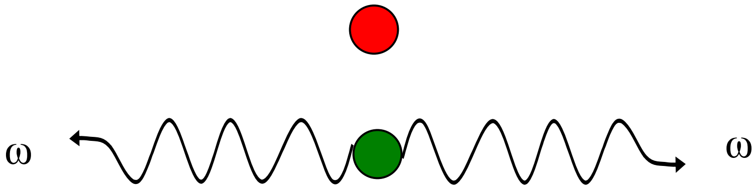
68. Was ist ein Minkowski Diagram? Erläutere mithilfe einer Skizze.
69. Betrachte einen vorbeifahrenden Zug, der in der Mitte einen Lichtblitz aussendet, so dass für den Beobachter im Zug die Lichtblitze gleichzeitig am jeweiligen Ende des Zuges ankommen. Was gilt für einen Beobachter am Bahnsteig, wenn die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist?
70. Erkläre anhand der Lorentz-Transformation bei welchem Messvorgang eine Längenkontraktion beobachtet wird.
71. Erkläre anhand der Lorentz-Transformation bei welchem Messvorgang eine Zeitdilatation beobachtet wird.

Vorlesung 14

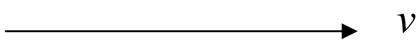
72. Beschreibe den relativistischen Doppler Effekt.
73. Was ist der relativistische Impuls und die relativistische Energie als Funktion der Geschwindigkeit?
74. Was sind die relativistischen Lagrange und Hamilton Funktionen? Was sind die entsprechenden Bewegungsgleichungen?

Der relativistische Doppler Effekt

Ein Atom sendet zwei Photonen mit Kreisfrequenz ω in entgegen gesetzte Richtungen aus:

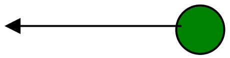


Doppler für bewegten Beobachter



$$\omega'_{+} = \omega(1+\tfrac{v}{c}) \qquad \omega'_{-} = \omega(1-\tfrac{v}{c})$$

Doppler für bewegten Emitter im „Äther“



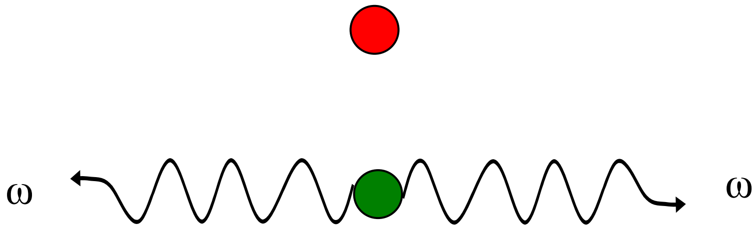
$$\omega''_{+} = \omega/(1-\tfrac{v}{c}) \qquad \omega''_{-} = \omega/(1+\tfrac{v}{c})$$

Relativistischer Doppler Effekt:

$$\omega_{+} = \omega\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \qquad \omega_{-} = \omega\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

Energetische Betrachtung

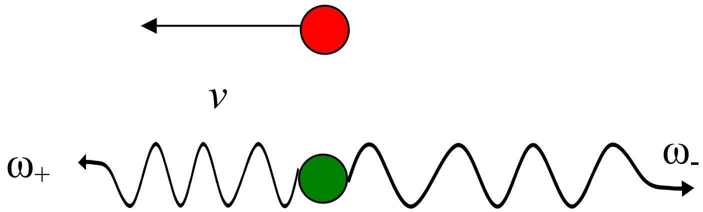
Ein Atom sendet zwei Photonen mit Kreisfrequenz ω in entgegen gesetzte Richtungen aus:



$$E_1$$

$$E_1 = E_0 + 2\hbar\omega$$

Energie für bewegten Beobachter/Objekt



$$E_1'$$

$$E_1' = E_0' + \hbar\omega\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} + \hbar\omega\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

Beobachtete Energie als auch Energieänderung hängen vom Bezugssystem ab

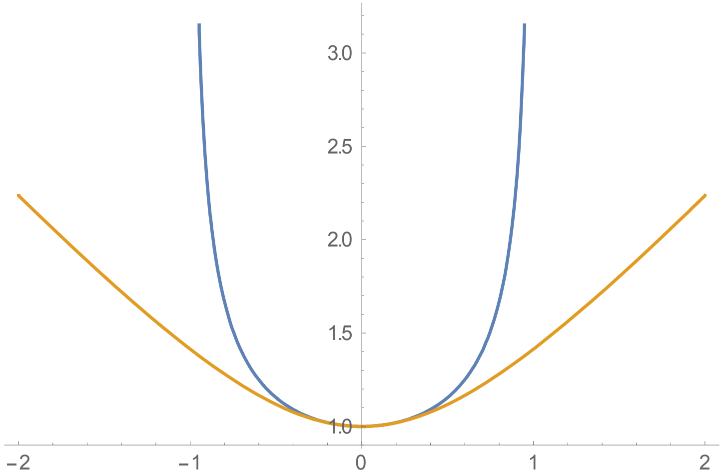
<u>Einstein 1905</u>: Die beobachtete Masse ändert sich

Relativistische Hamilton und Lagrange Funktionen

Einsteins Energie Formel $E = \gamma mc^2$

Bekannt ist $E(v)$. Was ist dann p und $H(p) = pv - L$?.

$$\frac{dE(v)}{dv} = \frac{d\gamma}{dv} mc^2 = \frac{d}{dv}(pv - L)$$



$p = \gamma mv$ $\qquad L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} - V(x)$ $\qquad H = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} + V(x)$

Schreibweise: „Vierervektoren“

$$\left(x^{\alpha}\right) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (c\,t,\, x,\, y,\, z)$$

„Metrik“

$$\left(\eta^{\alpha\beta}\right) = \left(\eta_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Raum Zeit Abstand $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta}$

Vierergeschwindigkeit $\left(u^{\alpha}\right) = \gamma\left(\frac{dx^0}{dt}, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right) = \frac{(c, v^1, v^2, v^3)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\,(c,\, \boldsymbol{v})$

Viererimpuls $\left(p^{\alpha}\right) = \left(m\,u^{\alpha}\right) = \left(\frac{m\,c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,,\, \frac{m\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$

Viererkraft (Lorentz) $\left(F^{\alpha}\right) = \gamma\left(q\,\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}}{c},\, q\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right)\right)$