

## 14. Vorlesungswoche: Relativistische Lagrange und Hamiltonfunktionen, Vierervektoren

### **Verständnisfragen für die Vorlesungen 12 bis 14 (Spezielle Relativitätstheorie)**

#### **Vorlesung 12**

- 66. Beschreibe das Michelson Morley Experiment (ohne Rechnungen). Was wird beobachtet?
- 67. Erläutere die Lorentztransformation. Welche Größe bei der Transformation bleibt erhalten?

#### **Vorlesung 13**

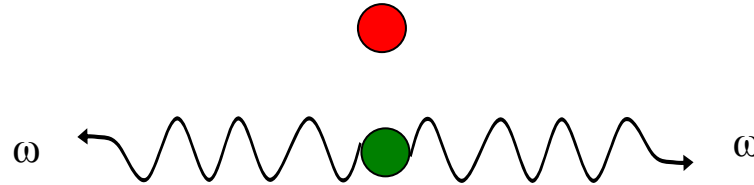
- 68. Was ist ein Minkowski Diagram? Erläutere mithilfe einer Skizze.
- 69. Betrachte einen vorbeifahrenden Zug, der in der Mitte einen Lichtblitz aussendet, so dass für den Beobachter im Zug die Lichtblitze gleichzeitig am jeweiligen Ende des Zuges ankommen. Was gilt für einen Beobachter am Bahnsteig, wenn die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist?
- 70. Erkläre anhand der Lorentz-Transformation bei welchem Messvorgang eine Längenkontraktion beobachtet wird.
- 71. Erkläre anhand der Lorentz-Transformation bei welchem Messvorgang eine Zeitdilatation beobachtet wird.

#### **Vorlesung 14**

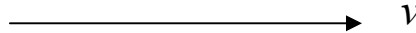
- 72. Beschreibe den relativistischen Doppler Effekt.
- 73. Was ist der relativistische Impuls und die relativistische Energie als Funktion der Geschwindigkeit?
- 74. Was sind die relativistischen Lagrange und Hamilton Funktionen? Was sind die entsprechenden Bewegungsgleichungen?

**Der relativistische Doppler Effekt**

Ein Atom sendet zwei Photonen mit Kreisfrequenz  $\omega$  in entgegengesetzte Richtungen aus:



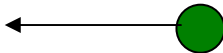
Doppler für bewegten Beobachter



$$\omega'_+ = \omega \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

$$\omega'_- = \omega \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Doppler für bewegten Emitter im „Äther“



$$\omega''_+ = \omega / \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$\omega''_- = \omega / \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

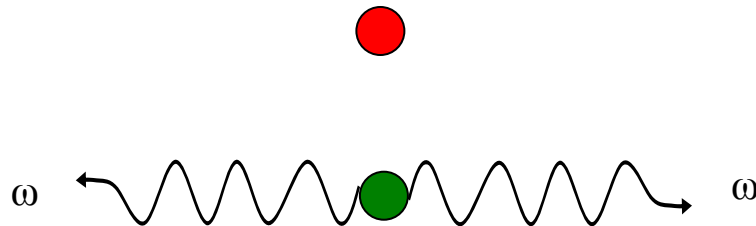
Relativistischer Doppler Effekt:

$$\omega_+ = \omega \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

$$\omega_- = \omega \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

**Energetische Betrachtung**

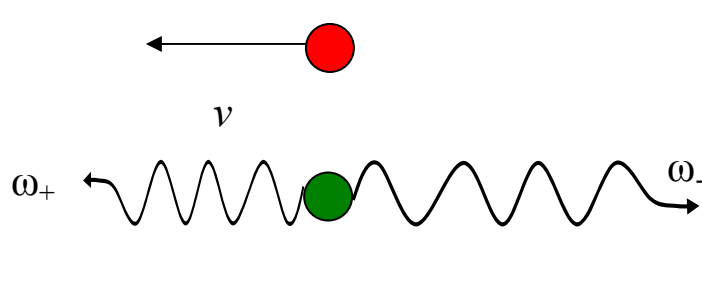
Ein Atom sendet zwei Photonen mit Kreisfrequenz  $\omega$  in entgegengesetzte Richtungen aus:



The diagram shows a red circle representing an atom at the top. Below it, a green circle represents the atom after emission. Two wavy lines representing photons extend horizontally from the green circle, one to the left and one to the right. Each wavy line has an arrow at its end pointing away from the atom. The left arrow is labeled  $\omega$  and the right arrow is labeled  $\omega$ .

$$E_1 = E_0 + 2\hbar\omega$$

Energie für bewegten Beobachter/Objekt



The diagram shows a red circle representing an atom moving to the left, indicated by a horizontal arrow pointing left below it labeled  $v$ . Below the moving atom, a green circle represents the atom after emission. Two wavy lines representing photons extend horizontally from the green circle, one to the left and one to the right. The left wavy line has an arrow labeled  $\omega_+$  and the right wavy line has an arrow labeled  $\omega_-$ .

$$E'_1 = E'_0 + \hbar\omega \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} + \hbar\omega \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

Beobachtete Energie als auch Energieänderung hängen vom Bezugssystem ab

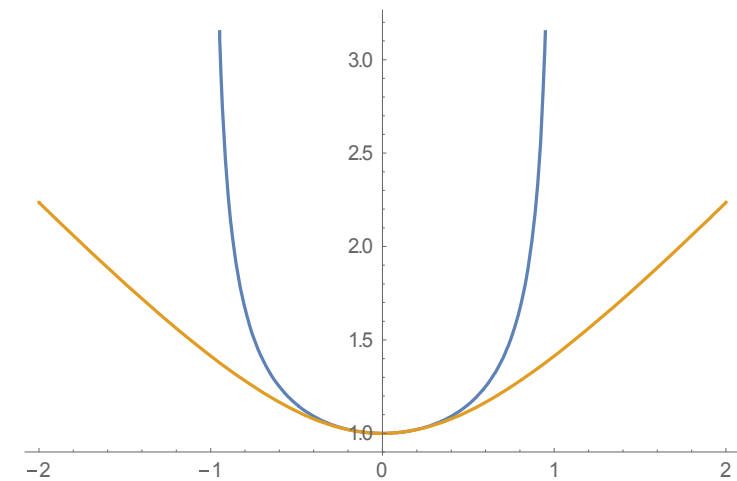
Einstein 1905: Die beobachtete Masse ändert sich

## Relativistische Hamilton und Lagrange Funktionen

Einsteins Energie Formel  $E = \gamma mc^2$

Bekannt ist  $E(v)$ . Was ist dann  $p$  und  $H(p) = pv - L$ ?

$$\frac{dE(v)}{dv} = \frac{d\gamma}{dv} mc^2 = \frac{d}{dv}(pv - L)$$



$$p = \gamma mv$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} - V(x)$$

$$H = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} + V(x)$$

**Schreibweise: „Vierervektoren“**

$$(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

Raum Zeit Abstand  $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$

**„Metrik“**

$$(\eta^{\alpha\beta}) = (\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vierergeschwindigkeit  $(u^\alpha) = \gamma \left( \frac{dx^0}{dt}, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right) = \frac{(c, v^1, v^2, v^3)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(c, v)$

Viererimpuls  $(p^\alpha) = (m u^\alpha) = \left( \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$

Viererkraft (Lorentz)  $(F^\alpha) = \gamma \left( q \frac{v \cdot E}{c}, q \left( E + \frac{v}{c} \times B \right) \right)$