Übungen 12. Vorlesungswoche: Bitte einreichen bis 10.7.2023, 10:00 Uhr in Kästen (5. Stock, Gebäude 46).

13. (15 Punkte) Relativistische Lagrangefunktion

Betrachte die relativistische Lagrangefunktion in einer Dimension $L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}} - V(x)$

a) Bestimme den Impuls und die Euler-Lagrange Gleichung.

b) Drücke die Geschwindigkeit durch den Impuls aus. Bestimme die Hamilton Funktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Was gilt für die Energie als Funktion der Geschwindigkeit, bzw. des Impulses?

c) Entwickle die Funktionen und die Bewegungsgleichungen in erster Ordnung im Parameter $\frac{\dot{x}^2}{c^2}$ und diskutiere die Korrekturen und Unterschiede zum nicht-relativistischen Fall.

Klausurvorbereitung Teil 1: Konzepte

<u>Verständnisfragen</u> für die Vorlesungen 9 bis 11

Vorlesung 9

50. Beschreibe welche Variablen bei den folgenden „Räumen" genutzt werden: Konfigurationsraum, Ereignisraum, Phasenraum, Zustandsraum
51. Was ist eine Zustandsgröße und wie kann die vollständige Zeitableitung a) als partielle Ableitungen und b) mithilfe der Poissonklammer berechnet werden?
52. Was ist die Definition einer Poissonklammer? Nenne mindestens 4 Eigenschaften einer Poissonklammer.
53. Was sind die „fundamentalen" Poissonklammern für kanonisch konjugierte Variablen? Stelle die Hamiltongleichungen mithilfe von Poissonklammern dar.
54. Was ist eine kanonische Phasentransformation und was gilt für die Bewegungsgleichungen. Gebe ein einfaches nicht-triviales Beispiel.

Vorlesung 10

55. Was ist das Kepler Problem? Wie lauten die Keplerschen Gesetze?
56. Stelle die kinetische Energie für ein Teilchen in Kugelkoordinaten dar. Was sind die entsprechenden verallgeinerten Impulse?
57. Was ist die Hamiltonfunktion für die Radialkomponente beim Kepler Problem? Was ist das effektive Potential in diesem Fall?
58. Stelle die Zeit für die Bewegung zwischen zwei radialen Phasenbahnpunkten beim Kepler Problem als Integral dar.

Vorlesung 11

59. Berechne die „Umkehrpunkte" beim Kepler Problem. Was zeichnet diese Punkte aus?
60. Argumentiere, dass das 2. Keplersche Gesetz aus der Drehimpulserhaltung folgt.
61. Stelle den Winkel φ zwischen zwei radialen Phasenbahnpunkten der Keplerbewegung als Integral dar.
62. Stelle eine Differentialgleichung für die Bewegung $r(\varphi)$ beim Keplerproblem auf und nutze die Variable $u=1/r$ um den Ausdruck zu vereinfachen.
63. Erläutere die Kepler-Bewegung für $E<0$ anhand der Ellipsengleichung $r(1+\varepsilon\cos\varphi)=c$ und erkläre die Bedeutung der Parameter.
64. Erläutere die Kepler-Bewegung für $E>0$ anhand der Hyperbelgleichung $r(1+\varepsilon\cos\varphi)=c$ und erkläre die Bedeutung der Parameter.
65. Erläutere die Bewegung in einem abstoßenden Coulomb-Potential $k<0$ anhand der Hyperbelgleichung $r(1+\varepsilon\cos\varphi)=c$ und erkläre die Bedeutung der Parameter.

Vorlesung 12-14: Spezielle Relativitätstheorie

Klausurvorbereitung Teil 2: Methoden anwenden

Generalisierte Koordinaten $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i\,(q_1, q_2, \ldots, q_S, t)$ $\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$

Lagrange Formalismus $L=T-V$ $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt}p_j$ $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

Noether Theorem $I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \sum_{j=1}^{s} p_j^{\alpha} \frac{\partial q_j^{\alpha}}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j^{\alpha}} \frac{\partial q_j^{\alpha}}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}$

Hamilton Formalismus $H\,(\mathbf{p}\,,\mathbf{q}\,) = \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}} - L$ $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$

Bewegung im Phasenraum $(\dot{q}_j, \dot{p}_j) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)$ $H(q,p) = \frac{p^2}{2m'} + V(q) = E$ $dt = \frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{2(E-V(q))}}dq$

Poisson Klammern/Phasentransformation $\{f,g\} = \sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right)$ $\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$ $\frac{\partial F}{\partial p_j} = -\{F, q_j\}$, $\frac{\partial F}{\partial q_j} = \{F, p_j\}$

Spezielle Relativitätstheorie: Lorentztransformation, Zeit- und Längen-Änderungen, Lagrange/Hamilton Beschreibung

Spezielle Relativitätstheorie

Bezugsssyteme in denen das erste Newtonsche Gesetz (Trägheitsgesetz) gilt, heißen **Intertialsysteme**

Maxwells Gleichungen: Licht breitet im Vakuum mit der Geschwindigkeit c aus *unabhängig vom Inertialsystem*.

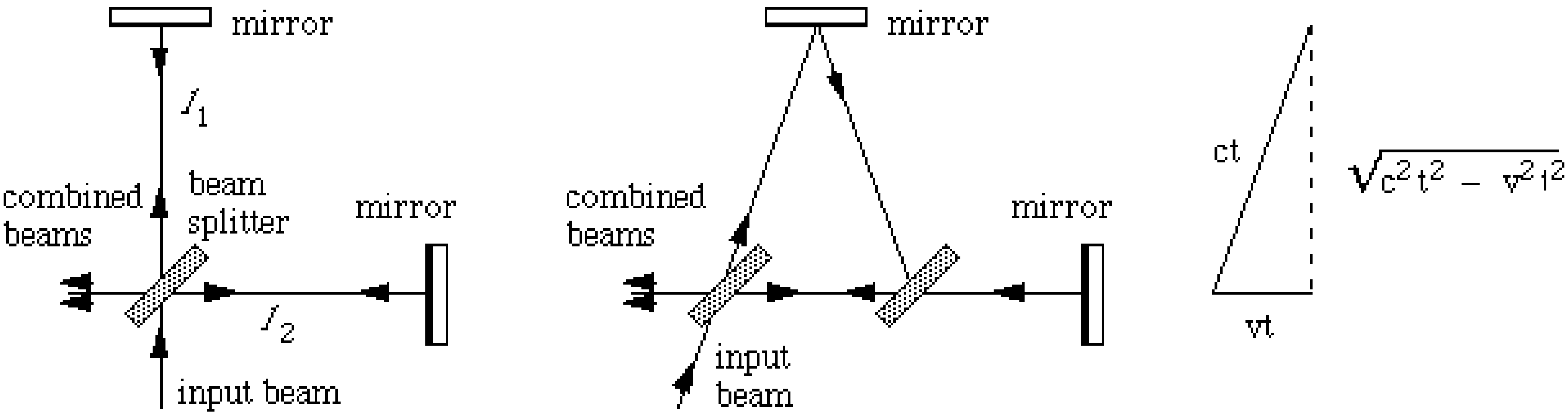
Problem:
Eine Galileitransformation erfüllt diese Bedingung nicht.

$$\frac{dx'}{dt'} = c \quad \xrightarrow[\text{Galileitransformation}]{x' = x - vt,\;\; t' = t} \quad \frac{dx}{dt} = c + v$$

Kurze Geschichte der speziellen Relativitätstheorie:

- Maxwell Gleichungen (1865)
- Michelson-Morley-Experiment (1887)
- Lorentz-Transformation von Hendrik Lorentz (1892, 1899) und Joseph Larmor (1897)
- Relativitätsprinzip durch Henri Poincaré (1898-1904)
- Spezielle Relativitätstheorie Albert Einsteins (1905)
- Zeit als vierte Dimension durch Hermann Minkowski (1907).

Michelson Morley Experiment

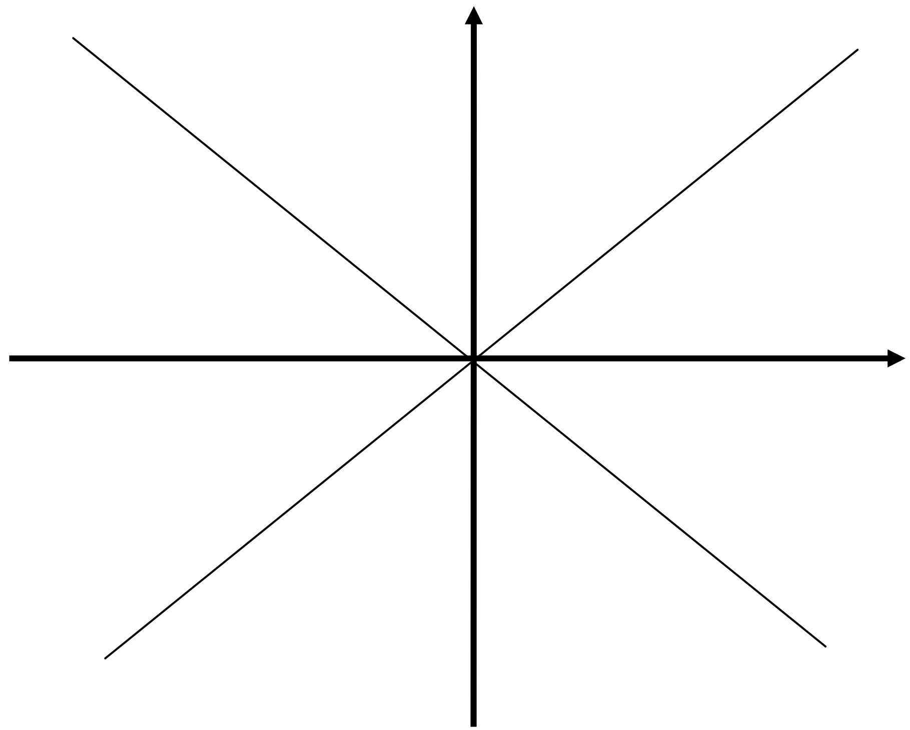


Lorentztransformation

Eine Lorentztransformation definiert ein neues Bezugssystem durch eine lineare Transformation der relativen Raum- und Zeit-Koordinaten, welche den Raum-Zeit-Abstand ds erhält:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$\frac{dx'}{dt'} = c \qquad \xrightarrow[\text{Lorentztransformation}]{c^2dt'^2 - dx'^2 = c^2dt^2 - dx^2} \qquad \frac{dx}{dt} = c$$



Drehung der Raum-Zeit Abstände

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = \left(\Lambda_{11} cdt + \Lambda_{12} dx\right)^2 - \left(\Lambda_{21} cdt + \Lambda_{22} dx\right)^2$$

Für Änderung der Geschwindigkeit entlang x-Richtung

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\, v/c \\ -\gamma\, v/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,, \quad ct' = \frac{ct - x\,v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Konsequenzen

- Längenkontraktion
- Zeitdilatation
- Unterschiedliche Reihenfolge von Ereignissen
- Raumartige und Zeitartige Abstände
- Relativistische Energie $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
- Bewegungsgleichungen $L = -mc^2\sqrt{1 - \dfrac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}} - V(\mathbf{r})$