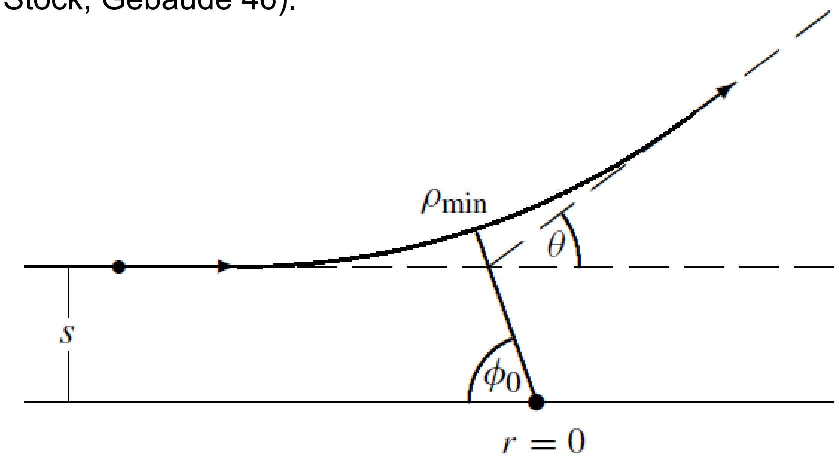
Übungen 11. Vorlesungswoche: Bitte einreichen bis 3.7.2023, 10:00 Uhr in Kästen (5. Stock, Gebäude 46).

12. (10 Punkte) Streuung und Stoßparameter



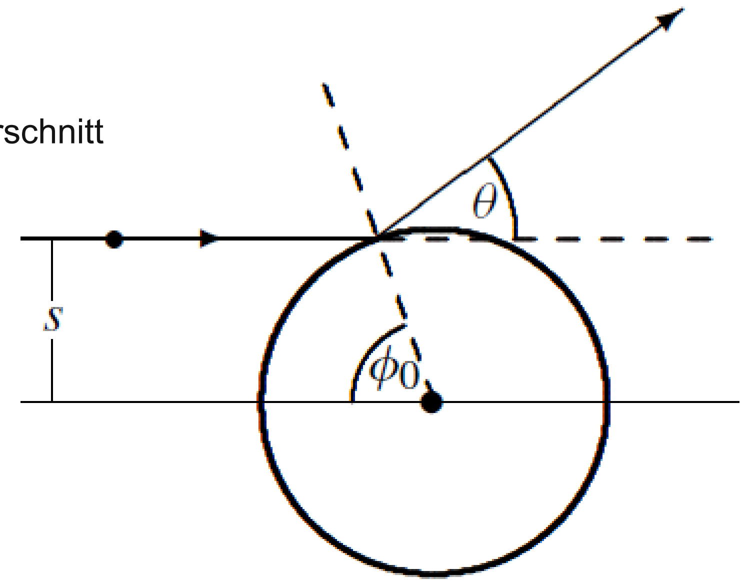
Es wird ein abstoßendes Coulombpotential betrachtet mit $k<0$.
Das Bild rechts zeigt die Bewegung relativ zum Schwerpunkt wobei die Lösung der Hyperbelgleichung um einen geeigneten Winkel ϕ_0 gedreht wurde, um Streuwinkel θ und den Stoßparameter s zu definieren.

a) Argumentiere, dass folgende Relationen gelten (siehe Vorlesung)

$$s\sqrt{2mE} = L_z \qquad \phi_0 = (\pi-\theta)/2 = \pi-\varphi_\infty \qquad -\cos\varphi_\infty = \frac{1}{\varepsilon}$$

b) Zeige dass $s = -\frac{k}{2E}\cot\frac{\theta}{2}$ und bestimme den differentiellen Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{ds(\theta)}{d\theta}\right|$
Dies ergibt die Rutherfordsche Streuformel.

c) Betrachte nun die Streuung an einer harten Kugel mit Radius a.
Bestimme $s(\theta)$ mithilfe der Zeichnung rechts und berechne den differentiellen Streuquerschnitt

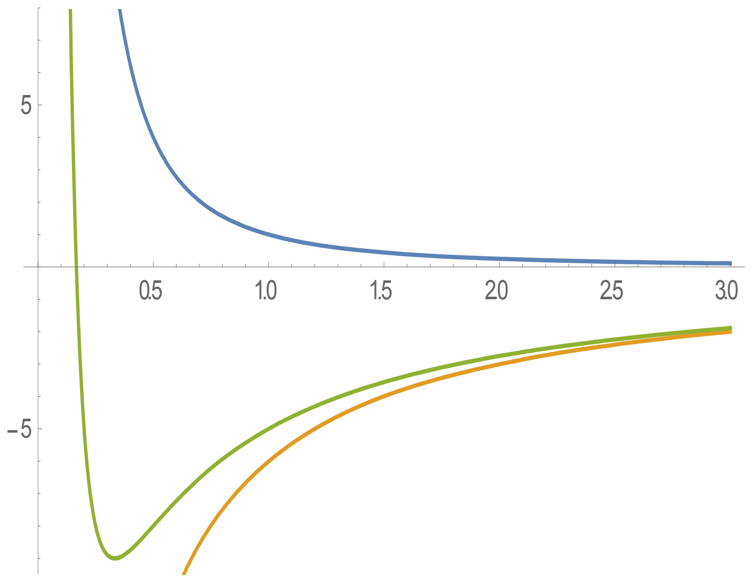


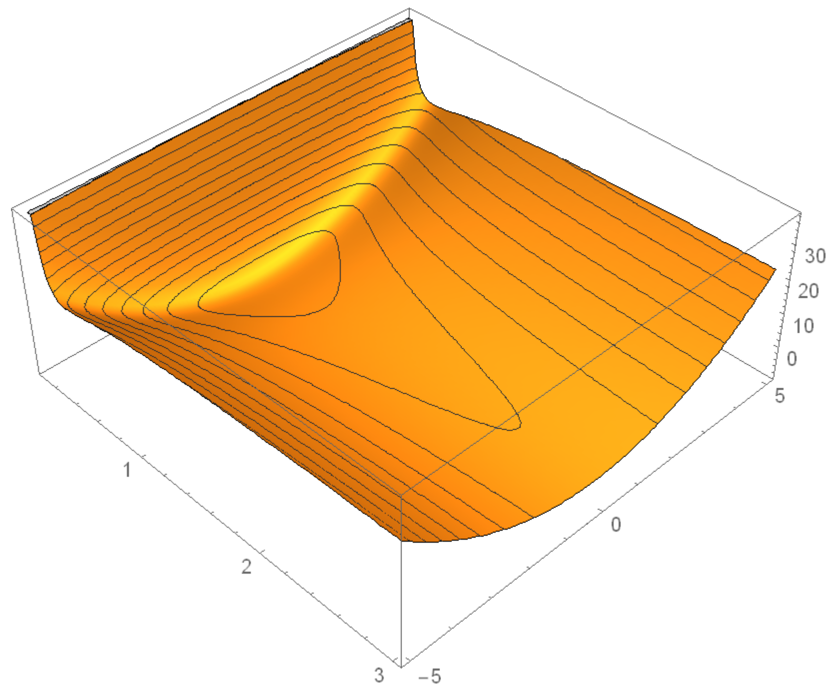
Kepler (Fortsetzung)

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{k}{r}$$

Bewegung im Phasenraum

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = \frac{p_r^2}{2m} + V_{eff}(r)$$





Kepler (Fortsetzung)

Integration der Bewegung im Phasenraum (siehe Vorlesungen 8-5 und 8-6)

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = \frac{p_r^2}{2m} + V_{eff}(r)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = \sqrt{\frac{2(E - V_{eff}(r))}{m}}$$

$$dt = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2(E - V_{eff}(r))}} dr$$

Winkelbewegung:

Wähle Ebene der Bewegung so dass Polarwinkel $\cos\vartheta = 0$ und $\dot{\vartheta} = 0$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} = \frac{L_z}{mr^2}$$

$$d\varphi = \frac{L_z}{mr^2} dt = \frac{L_z}{r^2\sqrt{2m\left(E - \frac{L_z^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}\right)}} dr$$

$$\int \frac{L_z}{r^2\sqrt{2m\left(E - \frac{L_z^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}\right)}} dr = \arccos\left(\frac{L_z / r - mk / L_z}{\sqrt{2mE + m^2k^2 / L_z^2}}\right) + \text{const}$$

$$\cos\varphi = \frac{L_z / r - mk / L_z}{\sqrt{2mE + m^2k^2 / L_z^2}}$$

Lösung als Differentialgleichung:

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2m}{L_z^2}\left(E - \frac{L_z^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}\right)$$

Definiere $r = 1/u$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2m}{L_z^2}\left(E - \frac{L_z^2 u^2}{2m} + ku\right)$$

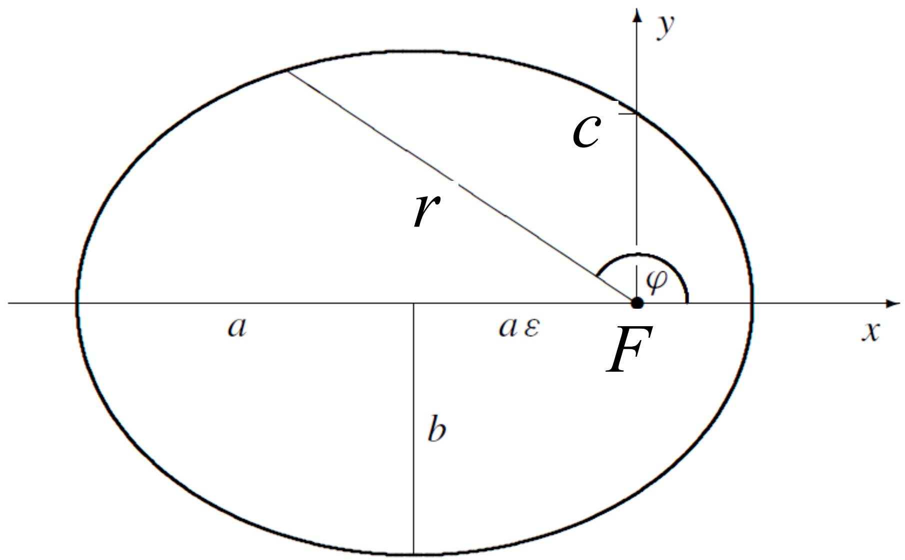
$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -u + \frac{mk}{L_z^2}$$

Ellipsenbahn

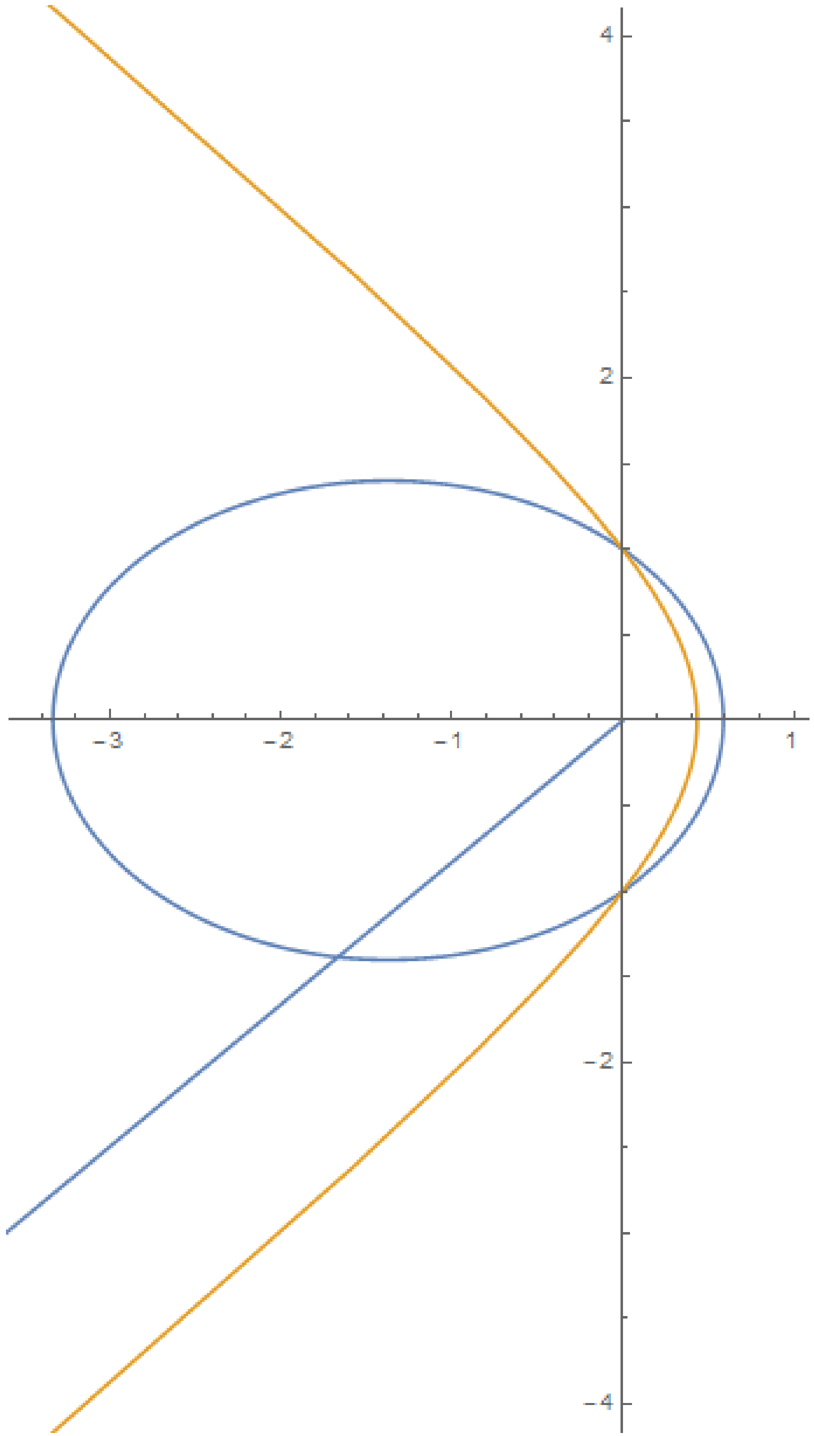
$$c = \frac{L_z^2}{mk} \qquad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2Ec}{k}$$

Ellipsengleichung relativ zum Brennpunkt F

$$r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = c$$

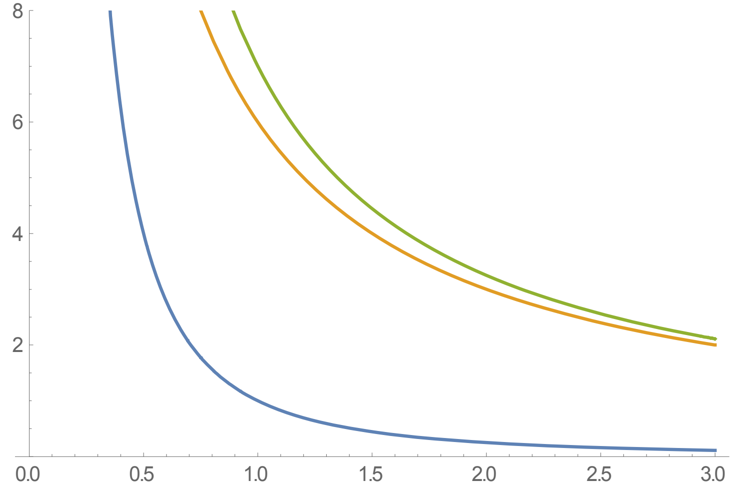


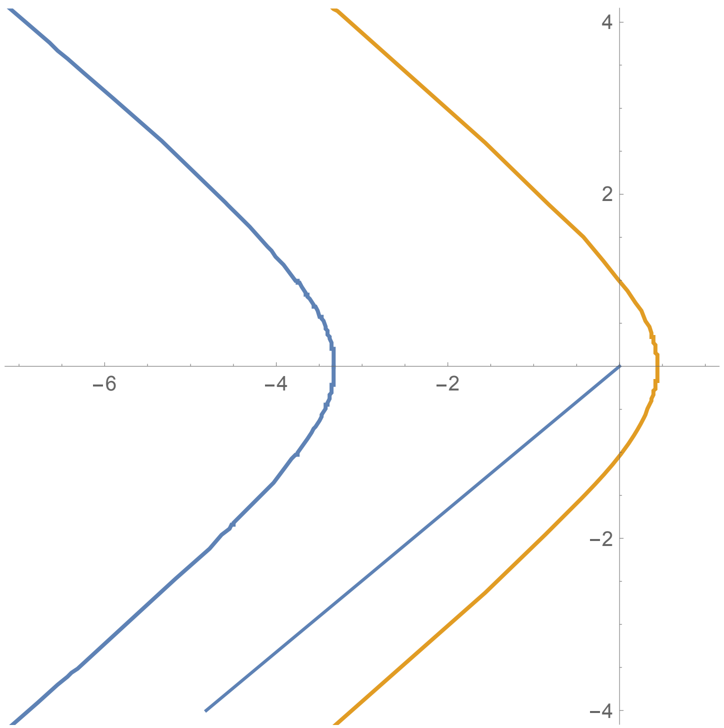
Ungebundene Lösungen für $E > 0$ und damit $\varepsilon^2 > 1$: **Hyperbeln**



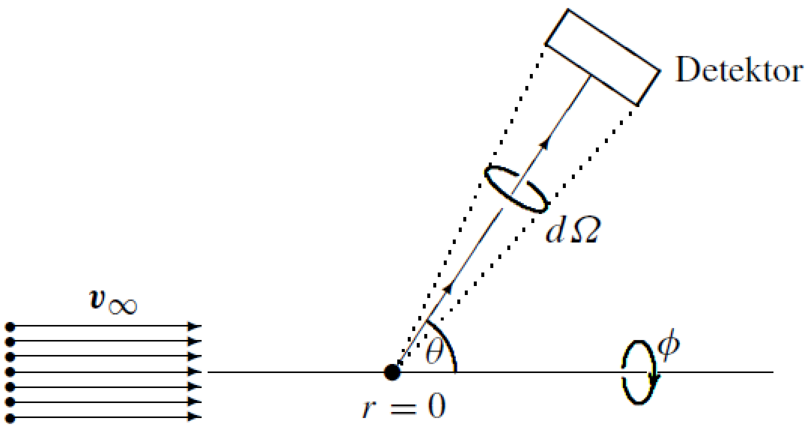
$$V_{eff}(r) = \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2} + \frac{|k|}{r}$$

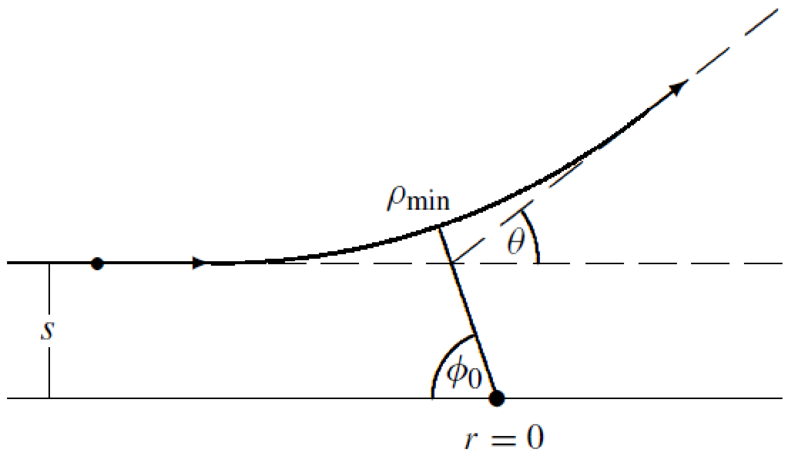
Ungebundene Lösungen für $k<0$ (Coulomb Potential)





Streuung und Stoßparameter $s = \frac{L_z}{\sqrt{2mE}}$





Differentieller Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{ds(\theta)}{d\theta}\right| = \frac{\text{Anzahl gestreuter Teilchen pro Zeit und pro } d\Omega}{\text{Anzahl einfallender Teilchen pro Zeit und Fläche}}$$