Übungen 10. Vorlesungswoche: Bitte einreichen bis 26.6.2023, 10:00 Uhr in Kästen (5. Stock, Gebäude 46).

11. (10 Punkte)

Betrachte den Laplace–Runge–Lenz-Vektor $\mathbf{A} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) + mV(r)\mathbf{r}$ und den Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ im Kepler-Problem $V(r) = -k/r$

a) Berechne die Poisson Klammern $\{L_z, H\}$ und $\{L_y, H\}$

b) Berechne die Poisson Klammer $\{A_x, H\}$ (Direkt in kartesischen Koordinaten oder nutze die Produktregel und das Resultat aus a). Argumentiere, dass alle drei Komponenten von $\mathbf{A} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) + mV(r)\mathbf{r}$ erhalten sind.

c) Berechne $\mathbf{L} \cdot \mathbf{A}$ als Funktion von $\mathbf{p}$ und $\mathbf{r}$. Was bedeutet das für die Richtungen der erhaltenen Vektoren relativ zu den Bewegungsrichtungen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{r}$?

d) Berechne $\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}}{mk} = \varepsilon r \cos \varphi$ als Funktion von $|\mathbf{L}|^2$ und r, wobei $\frac{|\mathbf{A}|}{mk} = \varepsilon$ erhalten sein muss (wegen b). Argumentiere, dass daraus direkt die Kegelschnittgleichung $r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = \mathrm{const}$ folgt.

Phasenraumtransformation für den Harmonischer Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega_0^2 q^2$$

$$q = \sqrt{\frac{2\bar{p}}{m\,\omega_0}}\ \sin\bar{q}\ ,$$
$$p = \sqrt{2\bar{p}\,m\,\omega_0}\ \cos\bar{q}$$

Umkehrung:

Kanonische Poisson Klammern:

$$\begin{aligned}\overline{H}\,(\bar{q},\bar{p}) &= H\,(q\,(\bar{q},\bar{p})\,,\,p\,(\bar{q},\bar{p}))\\ &= \frac{1}{2m} 2\bar{p}\,m\,\omega_0\ \cos^2\bar{q} + \frac{1}{2} m\,\omega_0^2 \frac{2\bar{p}}{m\,\omega_0}\ \sin^2\bar{q}\end{aligned}$$

Das Kepler Problem

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{k}{r}$$

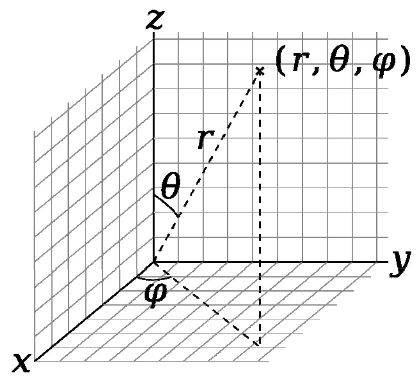
Keplersche Gesetze (1609)

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie Kuben der großen Achsen der Ellipsen.

Hamiltonfunktion in Kugelkoordinaten



$$x = r\,\sin\vartheta\,\cos\varphi\,; \quad y = r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi\,; \quad z = r\,\cos\vartheta$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\,\dot{r}\,; \quad p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m\,r^2\,\dot{\vartheta}\,; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\,r^2\sin^2\vartheta\;\dot{\varphi}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}p_\varphi^2\right) - \frac{k}{r}$$

Drehimpulserhaltung

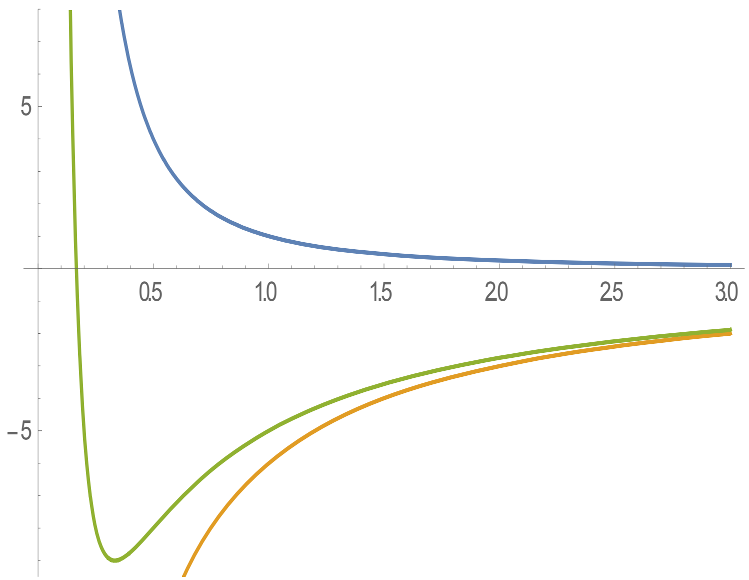
$$L_x = y\,p_z - z\,p_y = -m\,r^2 \left(\sin\varphi\,\dot{\vartheta} + \sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right) \;,$$
$$L_y = z\,p_x - x\,p_z = m\,r^2 \left(\cos\varphi\,\dot{\vartheta} - \sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right) \;,$$
$$L_z = x\,p_y - y\,p_x = m\,r^2 \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} \;.$$

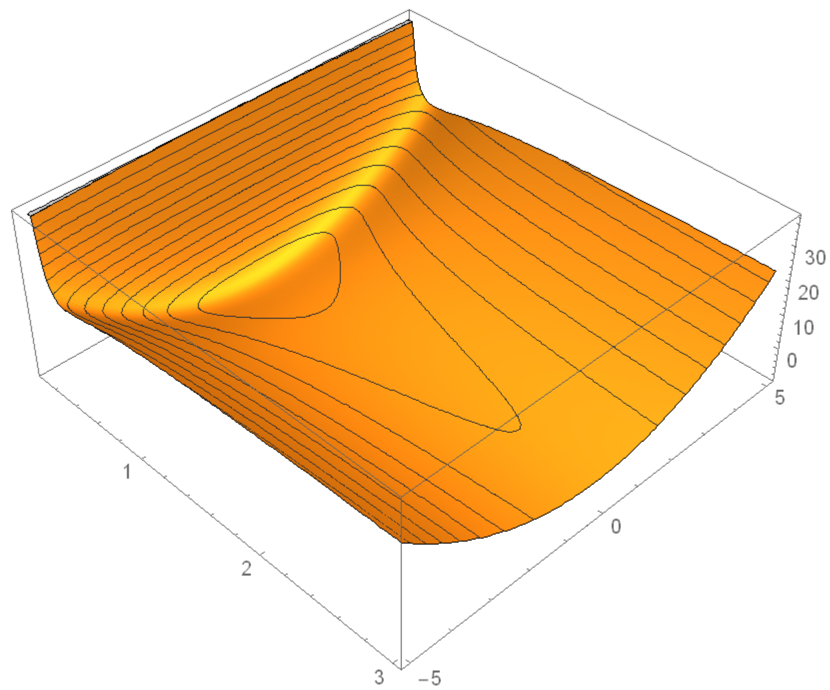
$$|\boldsymbol{L}|^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = m^2 r^4 \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) = p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

Bewegung im Phasenraum

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = \frac{p_r^2}{2m} + V_{eff}(r)$$





Integration der Bewegung im Phasenraum (siehe Vorlesungen 8-5 und 8-6)

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + V_{eff}(r) \qquad \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = \sqrt{\frac{2(E - V_{eff}(r))}{m}}$$

$$dt = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2(E - V_{eff}(r))}} dr$$

Winkelbewegung:

Wähle Ebene der Bewegung so dass Polarwinkel $\cos\vartheta = 0$ und $\dot{\vartheta} = 0$

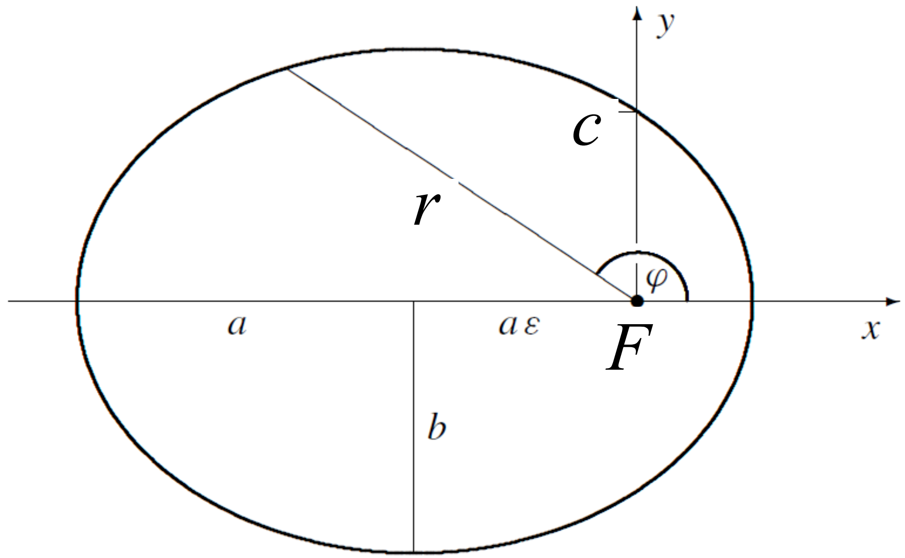
$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} = \frac{L_z}{mr^2}$$

$$d\varphi = \frac{L_z}{mr^2} dt = \frac{L_z}{r^2 \sqrt{2m\left(E - \frac{L_z^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}\right)}} dr$$

Ellipsenbahn

$$\int \frac{L_z}{r^2\sqrt{2m\left(E-\frac{L_z^2}{2mr^2}+\frac{k}{r}\right)}}dr = \arccos\left(\frac{L_z/r-mk/L_z}{\sqrt{2mE+m^2k^2/L_z^2}}\right)+\text{const}$$

$$\cos\varphi = \frac{L_z/r-mk/L_z}{\sqrt{2mE+m^2k^2/L_z^2}}$$



Ellipsengleichung relativ zum Brennpunkt F

$$r(1+\varepsilon\cos\varphi) = c$$