Theoretische Grundlagen der klassischen Mechanik (G2) SS 2023
Theoretische Physik I für LA

Anmeldung erforderlich: https://lv.physik.uni-kl.de/admin/index.php

Vorlesungen: Mi 8:15-9:45 in 46-270, Prof. Dr. Sebastian Eggert

Tutorien: Rekapitalution mit Diskussion alle zwei Wochen Fr 13:45-15:45 in 46-260

Übungsgruppen:
Einteilung wird via e-mail verschickt, gemäß der Wünsche bei der Anmeldung.

Gruppe I	Mo 15:30, 46/576	Mathis Giesen	jmgiesen@physik.uni-kl.de
Gruppe II	Do 11:45, 56/232	Simon Jäger	sjaeger@physik.uni-kl.de
Gruppe III	Fr 11:45, 46/387	Nico Fink	nfink@rhrk.uni-kl.de

Alle Vorlesungsmaterialien und Informationen:

https://www.physik.uni-kl.de/eggert/mech/

Literatur: kostenlos online über Unibibliothek. Unbedingt empfohlen!
Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 2: Analytische Mechanik (Springer)
Fließbach, Mechanik (Spektrum der Wissenschaft)

Scheine:

1) Übungen (1 SWS) 1-3 Übungsaufgaben pro Woche. Bestanden ab 50% der Punkte mit mindestens einmaligem Vorrechnen. Wird auf jeden Fall benötigt sowohl für den unbenoteten „unqualifizierten“ Übungsschein als auch zur Zulassung zur Klausur.

2) Klausur wird benötigt für den benoteten „qualifizierten“ Übungsschein, bzw. für die Teilmodulprüfung für Lehramt.

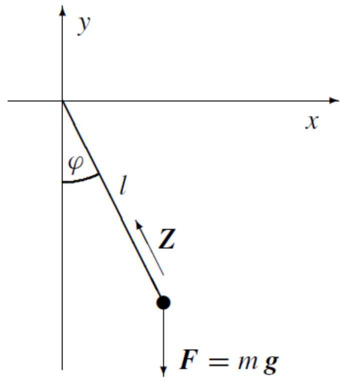
Inhalt Klassische Mechanik:
Lagrange Mechanik (Extremalprinzipien, Symmetrien und Erhaltungssätze);
Hamilton-Mechanik (Poisson-Klammern, kanonische Transformationen, Phasenraum);
Drehungen (rotierende Koordinatensysteme, Trägheitskräfte);
Spezielle Relativitätstheorie

Übungen 1. Vorlesungswoche: Bitte einreichen bis 24.4.2023, 9:00 Uhr in Kästen (5. Stock, Gebäude 46)

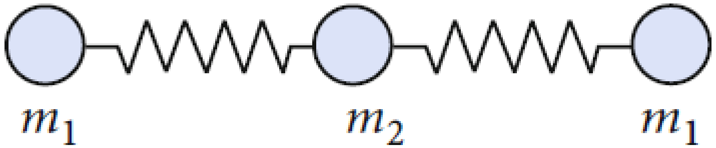
1.) Betrachte das mathematische Pendel (Fadenpendel). Was sind die kinetische Energie T und die potentielle Energie V als Funktion der generalisierten Koordinate φ? Stelle die entsprechende Bewegungsgleichung auf mithilfe von

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-V)=\frac{\partial}{\partial q_j}(T-V)$$

Entwickele die Gleichung für kleine Auslenkungen.

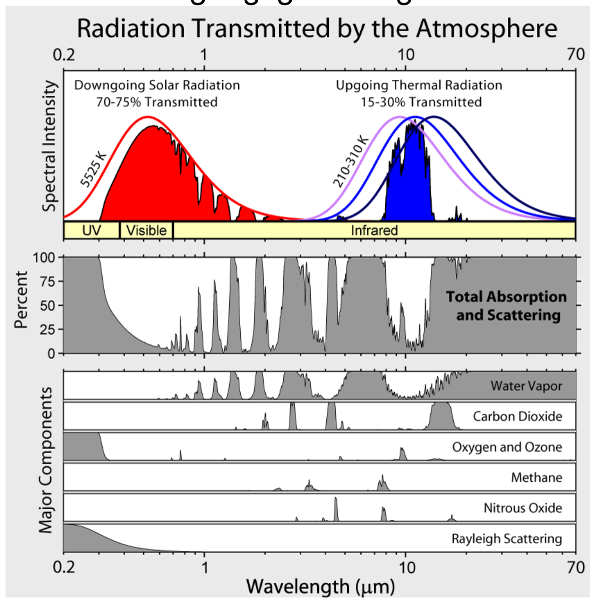


2.) Betrachte die ein-dimensionale Bewegung von 3 Massenpunkten, die mit zwei identischen Federn gekoppelt sind.



Stelle die Bewegungsgleichung für die drei Koordinaten gemäß der Newtonschen Gesetze auf. Zeige, dass die Bewegungsgleichungen entkoppeln bei einer geeignete Wahl von Relativ- und Schwerpunktskoordinaten. Was sind die “Eigenfrequenzen” der Normalmoden? Beschreibe die Bewegung der Normalmoden durch Geschwindigkeitspfeile aus der Gleichgewichtsposition.

(Anmerkung/freiwilliger Zusatz: Dies ist ein Minimalmodell für die Streckschwingungen von CO_2. Die asymmetrische Schwingung absorbiert IR Strahlung bei einer Wellenlänge von 4,3µm. Die symmetrische Schwingung ist nicht IR aktiv, da keine Ladungsverschiebung auftritt. Was wäre die entsprechende Frequenz? Der Treibhauseffekt tritt hauptsächlich durch die Deformationsschwingung (Biegung) bei Wellenlängen von 13-17 µm auf. Die Wellenlänge ist größer weil transversale Auslenkungen senkrecht zur Molekülsachse weniger Energie benötigen als longitudinale Auslenkungen.)



Wir kennen: **2. Newtonsches Axiom**

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\,\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$$

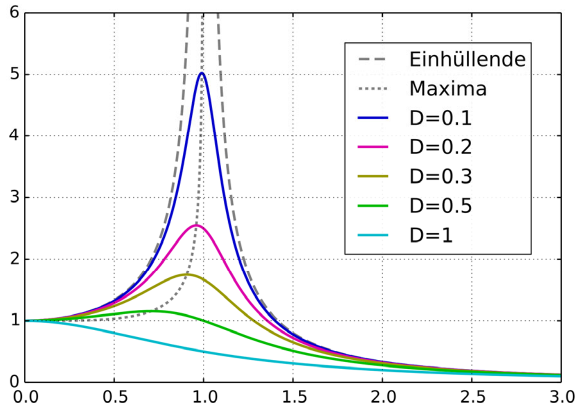
Führt zu einer Differentialgleichung falls $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t),\, \dot{\boldsymbol{r}}(t),\, t)$

Beispiele in einer Dimension für ein Teilchen:

Schwerefeld mit Reibung: $m\ddot{x} = -mg - \gamma\dot{x}$

Freie gedämpfte Schwingung: $m\ddot{x} = -kx - 2m\lambda\dot{x}$

Erzwungene Schwingung: $\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\mathrm{D}\dot{x} = f\cos(\omega t)$



Erhaltungssätze:

Impulserhaltung $\boldsymbol{F} = 0 \longrightarrow \boldsymbol{p} = \text{const.}$

Drehimpulserhaltung Definiere Drehimpuls $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{r} \times (m\,\dot{\boldsymbol{r}})$

$$m\,\boldsymbol{r}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{F}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} = \boldsymbol{M}$$

Energieerhaltung

Konservative Kraft falls $\boldsymbol{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = -\frac{d\,U(\boldsymbol{r})}{dt}$

$$\boldsymbol{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} = -\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \operatorname{grad} U$$

Multipliziere skalar mit $\dot{\boldsymbol{r}}$

$$m\,\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}\frac{m\,\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} = \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = P$$

$$\text{Kräfte konservativ} \quad \longrightarrow \quad \frac{m\,\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + U(\boldsymbol{r}) = E = \text{const.}$$

Systeme von Massenpunkten

$$m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu^{(a)} + \sum_{\mu=1,\, \mu\neq\nu}^{N} \boldsymbol{F}_{\nu\mu}$$

Summieren über alle Teilchen ergibt den <u>Gesamtimpuls</u> für die Bewegung des Schwerpunkts $\boldsymbol{R} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{r}_\nu$

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = M\ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1,\, \mu\neq\nu}^{N} \boldsymbol{F}_{\nu\mu} + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^{(a)} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^{(a)}$$

Und durch multiplizieren mit $\boldsymbol{r}_\nu \times$ für den <u>Gesamtdrehimpuls</u> $\boldsymbol{L} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \dot{\boldsymbol{r}}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\ell}_\nu$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \dot{\boldsymbol{r}}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^{(a)}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^{(a)} = \boldsymbol{M}$$

Für konservative Kräfte $\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_{\nu,\mathrm{kons}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_\nu = -\frac{dU(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N)}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_\nu$

nach Skalarmultiplikation mit $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_\nu$$

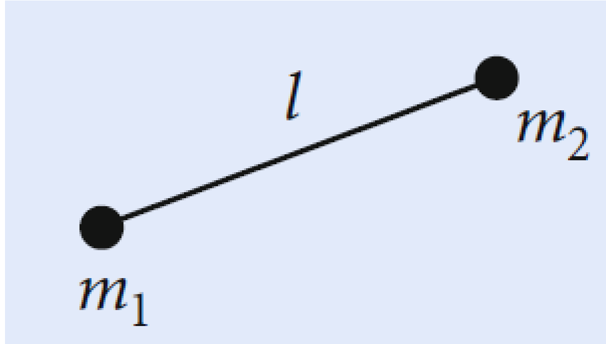
$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_\nu^{\,2} + U = E = \text{const.}$$

Beispiel: zwei gekoppelte Massenpunkte

$$F_{12} = -F_{21}$$

Holonome Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0\,, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, R)$$



$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2$$

Generalisierte Koordinaten $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_S)$

- unabhängig
- enthalten Zwangsbedingungen nach Transformation $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, \ldots, q_S, t)$
- haben generalisierte Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_S$

Zwangskräfte Z_i

halten die Teilchen auf den vorgegebenen Bahnen/Abständen/Hyperflächen

Problem:
Zwangskräfte sind auch bei bekannten Zwangsbedingungen unbekannt und werden dynamisch durch die Bewegung erzeugt.

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{K}_i + \boldsymbol{Z}_i = m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

Zwangskräfte bei einer Zwangsbedingung und einem Teilchen (Oberfläche)

$$g(\boldsymbol{r}, t) = 0 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{Z} \parallel \operatorname{grad} g(\boldsymbol{r}, t)$$

Möglicher Ansatz $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r}, t) = \lambda(t) \operatorname{grad} g(\boldsymbol{r}, t)$

Allgemeiner Zugang für zeitunabhägige Zwangsbedingungen ("skleronom"):

Für beliebige <u>virtuelle Verrückungen</u> $\delta \boldsymbol{r}_i$ im erlaubten Konfigurationsraum gilt

<u>Zwangskräfte verüben keine virtuelle Arbeit</u>

$$\sum_i \boldsymbol{Z}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

Gilt auch für zeitabhängige Zwangskräfte ("rheonom") falls man die Zeit einfriert $\delta t = 0$

d'Alembert'sches Prinzip

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{K}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

Linke Seite der "Bewegungsgleichung" $$\underline{\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i} = \sum_i \boldsymbol{K}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$$

Virtuelle Verrückungen sind *nicht* unabhängig wegen der Transformationsbedingung $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, \ldots, q_S, t)$

Für beliebige infinitesimale Änderungen gilt (t=const.)

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

und die Kettenregel $$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

Daher

$$\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{S} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{S} m_i \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{S} m_i \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{S} m_i \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \right) \right\} \delta q_j$$

Ableitungen der kinetischen Energie $$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2$$

Zusammenfassend:

$$\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{S} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

Rechte Seite der “Bewegungsgleichung” $$\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \underline{\sum_i \boldsymbol{K}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i}$$

Für konservative Systeme: Nutze die potentielle Energie $\boldsymbol{K}_i = -\nabla_i V$

Definition: *generalisierte Kraftkomponenten*

$$\boxed{Q_j = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{K}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}} = \sum_{i=1}^{N} (-\nabla_i V) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\sum_i \boldsymbol{K}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{S} \boldsymbol{K}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_{j=1}^{S} Q_j \, \delta q_j$$

Somit (d’Alembert):

$$\boxed{\sum_{j=1}^{S} \left\{ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0}$$

Verrückungen der generalisierten Koordinaten sind *unabhängig*. Daher für konservative Kräfte:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) = \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V)$$