Vorlesungen:

Donnerstag, 10.1.: Diagonalisierung von Matrizen. Funktionen von Operatoren. Kommutierende Operatoren.

Lektüre:

Kapitel über Eigenwertprobleme und Operatorfunktionen
(z.B. Shankar Kap.1.8-1.9)

Übungen:

Einzureichen bis Di, 15.1.2019 um 10:00 in Fach neben 46-594.

13.) (15 Punkte)

Betrachte den hermiteschen Operator $O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und den Zustand $|a\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Finde die Eigenwerte o und orthonormale Eigenvektoren $|o\rangle$ zu $O|o\rangle = o|o\rangle$.

b) Bestimme U, so dass $U^\dagger OU$ diagonal wird. Berechne $U^\dagger OU$ explizit.

c) Entwickle $|a\rangle$ in der Eigenbasis von *O*.

d) Was sind die möglichen Messwerte und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten *P(o)* für eine Messung von O am Anfangszustand $|a\rangle$? Was sind die jeweiligen Endzustände?

e) Berechne explizit beide Seiten der Gleichung: $\langle a|O|a\rangle = \sum_o oP(o)$

14.) (10 Punkte)

a) Zeige, dass die Spur eines hermiteschen Operators die Summe der Eigenwerte ergibt: $tr\Lambda = \sum_j \lambda_j$

b) Zeige, dass entsprechend die Determinante durch das Produkt der Eigenwerte gegeben ist $\det\Lambda = \prod_j \lambda_j$

c) Betrachte den hermiteschen Operator $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Folgere aus $tr\Lambda = \sum_j \lambda_j$ und $\det\Lambda = \prod_j \lambda_j$, dass für die Eigenwerte gilt $\lambda_{1/2} = a \pm b$

Verständnisfragen

18.) Was versteht man unter einer Transformation? Zeige, dass dabei das innere Produkt erhalten bleibt. Erkläre die Sichtweisen einer aktiven und einer passiven Transformation.

19.) Wie sind Eigenwerte und Eigenvektoren eines Operators definiert?

20.) Zeige, dass es eine charakteristische Gleichung gibt, die eine notwendige Bedingung für die Existenz eines nicht-trivialen Eigenwerts darstellt.

21.) Formuliere und löse das Eigenwertproblem für eine Drehung von $\pi/2$ um eine Achse im drei-dimensionalen Raum.

22.) Zeige, dass hermitesche Operatoren reelle Eigenwerte besitzen und dass die Eigenvektoren orthogonal sind, falls die Eigenwerte verschieden sind.