Vorlesungen:

Donnerstag, 29.11.: Operatoren

Lektüre:

Kapitel über lineare Operatoren (z.B. Shankar Kap.1.5 und 1.6)

Übungen:

Einzureichen bis Di, 4.12.2018 um 10:00 in Fach neben 46-594. Jeweils 10 Punkte.

7). Die Spur ist die Summe der Diagonalelemente von einem beliebigen Operator $\mathrm{tr}\, D = \sum_j \langle j|D|j\rangle$. Zeige allgemein

a) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

b) $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA)$

8a) Zeige dass für den Kommutator gilt $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

Für den Rest der Aufgabe soll angenommen werden, dass der Kommutator $[A, B] = c\hat{I}$ proportional zur Identität $\hat{I}$ ist, die immer mit allen Operatoren kommutiert.

b) Zeige, dass $[A, B^n] = n[A, B]B^{n-1}$

c) Berechne $[A, e^B]$. Die Exponentialfunktion eines Operators ist durch die Reihenentwicklung definiert.

d) Was gilt für $[A, f(B)]$? Hier soll f eine Operatorfunktion sein, die durch die Reihenentwicklung der entsprechenden analytischen Funktion f gegeben ist.

e) Zeige, dass $e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]}$

9.) Gegeben sei ein beliebiger Projektionsoperatoren mit $P = P^2$ und P hermitesch.

a) Zeige, dass jeder Vektor zerlegt werden kann $|\psi\rangle = |\psi_{\parallel}\rangle + |\psi_{\perp}\rangle$, mit $P|\psi_{\parallel}\rangle = |\psi_{\parallel}\rangle$ und $P|\psi_{\perp}\rangle = 0$.

b) Zeige dass alle Vektoren mit $P|\psi_{\parallel}\rangle = |\psi_{\parallel}\rangle$ einen Untervektorraum bilden, der orthogonal zum Untervektorraum der Vektoren mit $P|\psi_{\perp}\rangle = 0$ ist.

Verständnisfragen

6.) Zeige wie die Darstellung von Vektoren mit Koeffizienten in einer orthonormalen Basis zur Bestimmung des inneren Produkt dienen kann. Umgekehrt, wie kann die Darstellung mit Hilfe des inneren Produktes bestimmt werden?

7.) Was ist die Dreiecks- und die Schwarzsche Ungleichung? Skizziere die Beweise.

8.) Wozu dient die Gram-Schmidt Methode? Beschreibe sie.

9.) Definiere „Lineare Abbildungen“ (Operatoren).

10.) Zeige, dass eine lineare Abbildung eindeutig durch ihre Wirkung auf eine Basis definiert werden kann. Welche Koeffizienten müssen konkret berechnet werden um die Abbildung zu definieren? Zeige, warum eine Anordnung der Koeffizienten als Matrix sinnvoll ist.