

## 2 Thermodynamik nicht wechselwirkender Bosonen

Wir betrachten ein Ensemble von Bosonen im thermodynamischen Gleichgewicht in der großkanonischen Gesamtheit. Obwohl diese für Temperaturen unterhalb der kritischen Temperatur der Bosekondensation an manchen Stellen fragwürdig wird, wollen wir sie hier verwenden, da sie eine einfache Behandlung im Rahmen der zweiten Quantisierung erlaubt. Der statistische Operator in der großkanonischen Beschreibung lautet

$$(1) \quad \varrho = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\beta(\hat{H} - \mu \hat{N}) \right\}$$

Hierbei sind  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ,  $\hat{H}$  der Hamiltonoperator,  $\hat{N}$  der Teilchenzahloperator,  $\mu$  ist das sog. chemische Potential.  $Z$  ist die Zustandssumme

$$(2) \quad Z = \text{Tr} \left\{ \exp \left( -\beta(\hat{H} - \mu \hat{N}) \right) \right\}$$

$\text{Tr}$  bedeutet Spurbildung über alle Zustände  $\varphi_\nu$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  Teilchenzahlen. Im Falle eines idealen, d.h. nicht wechselwirkenden Bosegases gilt

$$(3) \quad \hat{H} = \int dx \hat{\Psi}^+(x) h_D \hat{\Psi}(x) = \sum_\nu \epsilon_\nu \hat{b}_\nu^\dagger \hat{b}_\nu = \sum_\nu \epsilon_\nu \hat{n}_\nu$$

wobei die  $\epsilon_\nu$  die Einteilchenenergien und  $\hat{n}_\nu = \hat{b}_\nu^\dagger \hat{b}_\nu$  der Teilchenzahloperator des zugehörigen Energiezustandes bedeutet. Da ebenfalls gilt

$$(4) \quad \hat{N} = \int dx \hat{\Psi}^+(x) \hat{\Psi}(x) = \sum_\nu \hat{n}_\nu$$

findet man für die Zustandssumme

$$(5) \quad \begin{aligned} Z &= \text{Tr} \left\{ e^{-\beta \sum_\nu (\epsilon_\nu - \mu) \hat{n}_\nu} \right\} \\ &= \prod_\nu \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_\nu - \mu)n} \end{aligned}$$

wobei das bekannte Eigenwertspektrum von  $\hat{n}_\nu = \hat{b}_\nu^\dagger \hat{b}_\nu$  ( $\hat{n}_\nu |n\rangle = n |n\rangle$   $n = 0, 1, 2, \dots$ ) verwendet wurde. Das liefert

$$(6) \quad \boxed{Z = \prod_\nu \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_\nu}}}$$

mit  $z = e^{\beta\mu}$  der sog. Fugazität. Die Zustandssumme liefert alle relevanten thermodynamischen Größen. Z.B. hat man

$$(7) \quad \begin{aligned} \langle \hat{N} \rangle &= \text{Tr} \left\{ \sum_\nu \hat{n}_\nu \varrho \right\} = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ \sum_\nu \hat{n}_\nu e^{-\beta \sum_\lambda (\epsilon_\lambda - \mu) \hat{n}_\lambda} \right\} \\ &= \frac{1}{Z} \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta \sum_\lambda (\epsilon_\lambda - \mu) \hat{n}_\lambda} \right\} \\ &= k_B T \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \mu} Z = k_B T \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z = z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z \end{aligned}$$

$$(8) \quad \langle \hat{N} \rangle = z \sum_{\nu} \frac{e^{-\beta \epsilon_{\nu}}}{1 - z e^{-\beta \epsilon_{\nu}}} = \sum_{\nu} \frac{1}{\frac{1}{z} e^{\beta \epsilon_{\nu}} - 1}$$

Die Forderung  $\langle \hat{N} \rangle = N$  legt  $z$  bzw. das chemische Potential  $\mu = \mu(N, T)$  fest.

Damit  $\langle \hat{N} \rangle$  positiv ist für beliebige  $\beta$  (Temperaturen) und da  $\epsilon_{\nu} \geq 0$  muss für die Fugazität gelten

$$(9) \quad 0 < z \leq 1$$

Der Grundzustand des Systems habe die Energie  $\epsilon_0 = 0$ , alle anderen Zustände  $\epsilon_{\nu} > 0$ .

Betrachten wir als nächstes die mittlere Anzahl der Teilchen in angeregten Zuständen. Dann können wir folgende Abschätzungen machen:

$$(10) \quad \begin{aligned} \langle \hat{N}' \rangle &= \sum_{\nu \neq 0} \frac{1}{\frac{1}{z} e^{\beta \epsilon_{\nu}} - 1} \\ &< \sum_{\nu \neq 0} \frac{1}{e^{\beta \epsilon_{\nu}} - 1} \equiv N'_{\max} \end{aligned}$$

Da der Ausdruck auf der rechten Seite nicht mehr von  $\mu = \mu(N, T)$  abhängt, ist er unabhängig von  $N$ . Ist  $N'_{\max}$  endlich, bedeutet (10), dass bei einer gegebenen Temperatur nur eine Maximalzahl von Teilchen in die angeregten Zustände passen. Wird  $N$  über diesen kritischen Wert erhöht, müssen alle weiteren Teilchen in den Grundzustand gehen und es kommt zu einer makroskopischen Besetzung dieses Zustandes. Man spricht von einer

### Bose-Kondensation

Der Effekt tritt auch auf, wenn die Teilchenzahl festgehalten wird und die Temperatur unter einen kritischen Wert  $T_c$  fällt.

Wir wollen dieses Phänomen jetzt für verschiedene Situationen untersuchen:

#### (A) ideales Bosegas in $\infty$ ausgedehntem Raum

$$(11) \quad \epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Einsetzen in Gl. (10) mit

$$(12) \quad \sum_{\nu \neq 0} \rightarrow \begin{cases} L 2 \int_{0^+}^{\infty} dk \frac{1}{2\pi} & 1 - D \quad L \text{ Länge} \\ A \cdot 2\pi \int_{0^+}^{\infty} dx k \frac{1}{(2\pi)^2} & 2 - D \quad A \text{ Fläche} \\ V \cdot 4\pi \int_{0^+}^{\infty} dk k^2 \frac{1}{(2\pi)^3} & 3 - D \quad V \text{ Volumen} \end{cases}$$

liefert für die Dichte der angeregten Atome  $n'$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 n' &= \int_{0^+}^{\infty} dk f(k) \frac{1}{\frac{1}{z} e^{\frac{\beta \hbar^2 k^2}{2m}} - 1} \\
 (13) \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^+}^{\infty} dk f(k) z^n e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m} n}
 \end{aligned}$$

wobei  $f(k) = \frac{2}{2\pi}$  in 1D,  $f(k) = \frac{2\pi k}{(2\pi)^2}$  in 2D, und  $\frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3}$  in 3D ist.

1-dimensionales, ideales, homogenes Bosegas

$$(14) \quad n'_{1D} = \frac{N'_{1D}}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{1/2}} \frac{1}{\lambda} \equiv g_{1/2}(z) \frac{1}{\lambda}$$

mit  $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$ :  $g_{1/2}(z)$  divergiert für  $z \rightarrow 1 \Rightarrow n'_{1D}$  nicht von oben beschränkt  $\Rightarrow$

$\boxed{\text{}} \quad \text{Bosekondensation in 1-D}$   
in einem homogenen System

2-dimensionales, ideales, homogenes Bosegas

$$(15) \quad n'_{2D} = \frac{N'_{2D}}{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \equiv g_1(z) \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

auch  $g_1(z)$  divergiert für  $z \rightarrow 1$

$\boxed{\text{}} \quad \text{Bosekondensation in 2-D}$   
in einem homogenem System

3-dimensionales, ideales, homogenes Bosegas

$$(16) \quad n'_{3D} = \frac{N'_{3D}}{V} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{3/2}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 = g_{3/2}(z) \left(\frac{1}{\lambda}\right)^3$$

$g_{3/2}(1) = \zeta(3/2) \cong 2.61238$        $\zeta$ -Riemann Zeta Funktion

$$(17) \quad \Rightarrow n'_{3D}^{\max} = \zeta(3/2) \left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 \quad \text{Bosekondensation für } n_{3D} > n'_{3D}^{\max}!$$

Der relative Anteil der Teilchen im Grundzustand kann wie folgt abgeschätzt werden

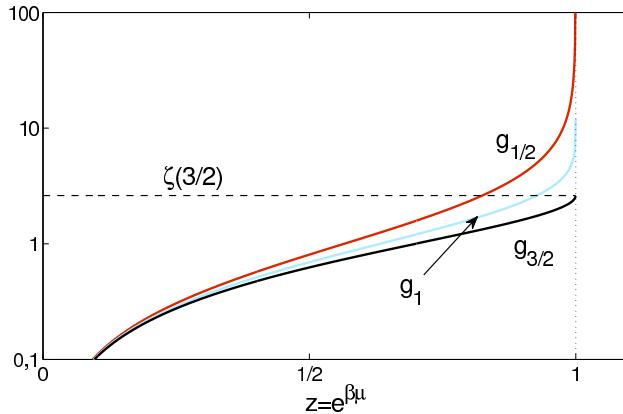


Abbildung 1: Funktionen  $g_{1/2}(z)$ ,  $g_1(z)$  und  $g_{3/2}(z)$

$$\frac{N_0}{N} \cong \frac{N - N'^{\max}}{N} \cong 1 - \zeta(3/2) \left( \frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{V}{N}$$

$$(18) \quad \boxed{\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2}} \quad \text{für } T \leq T_c$$

mit der kritischen Temperatur

$$(19) \quad \boxed{T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B[\zeta(3/2)]^{2/3}} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3}}$$

Bosekondensation tritt entweder für  $N > N'^{\max}$  oder  $T < T_c$  auf, was mit Hilfe der Phasenraumdichte durch

$$(20) \quad \boxed{n \lambda^3 = n \lambda^3(T_c) = \zeta(3/2) = 2.61238}$$

ausgedrückt werden kann.

Bemerkung: Die Nichtexistenz langreichweiterer Ordnung (Bose-Kondensation u.ä.) in 1-D und 2-D homogenen System ist von Hohenberg, Phys. Rev. 158 383 (1967) und Mermin und Wagner, Phys. Rev. Lett. 17, 1133 (1966) allgemein diskutiert worden.

Für das chemische Potential findet man aus (8) mit  $\nu = 0$

$$(21) \quad z = e^{\beta\mu} = \frac{1}{1 + \frac{1}{N_0}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\mu = -k_B T \ln \left( 1 + \frac{1}{N_0} \right)}$$

im TD Limes  $N_0 \rightarrow \infty$  :  $\mu \rightarrow 0$

## (B) Bosekondensation in harmonischen Fallen

In einem äußeren harmonischen Potential

$$(22) \quad V = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$$

welches wir zur Vereinfachung als isotrop betrachten wollen, d.h.  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega$  sind die Energiezustände durch

$$(23) \quad \mathcal{E} = \ell \hbar \omega \quad \ell = \begin{cases} \ell_x & 1D \\ \ell_x + \ell_y & 2D \\ \ell_x + \ell_y + \ell_z & 3D \end{cases}$$

gegeben. Damit findet man für die Besetzung der angeregten Zustände  $\vec{\ell} \neq 0$   
 $\vec{\ell} = \{\ell_x\} \dots \{\ell_x, \ell_y, \ell_z\}$

$$(24) \quad \begin{aligned} N' &= \sum_{\vec{\ell} \neq 0} \frac{1}{z} e^{\beta \ell \hbar \omega} - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\vec{\ell} \neq 0} z^k e^{-\beta \ell k \hbar \omega} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} z^k \left[ \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega k}} \right)^d - 1 \right] \end{aligned}$$

d = Dimension

Nun gilt für große x

$$(25) \quad \left( \frac{1}{1 - e^{-x}} \right)^d - 1 \leq \begin{cases} \frac{1}{x^2} & d = 2 \\ \frac{1}{x^3} & d = 3 \end{cases}$$

Der Fall  $d = 1$  muss gesondert behandelt werden:

$$d = 2$$

$$(26) \quad \boxed{N'_{2d} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \left( \frac{1}{\beta \hbar \omega} \right)^2 = g_2(z) \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^2}$$

$$d = 3$$

$$(27) \quad \boxed{N'_{3d} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^3} \left( \frac{1}{\beta \hbar \omega} \right)^3 = g_3(z) \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3}$$

$$\text{mit } g_2(z) \leq \zeta(2) = 1.64493 \dots \\ g_3(z) \leq \zeta(3) = 1.20206 \dots$$

folgt, dass Bosekondensation in 3-D und 2-D existiert.

Man findet analog zu den Rechnungen im homogenen Fall

2d

$$(28) \quad \left( \frac{N_0}{N} \right)_{2d} = 1 - \left( \frac{T}{T_c^{(2d)}} \right)^2 \quad T_c^{(2d)} = \frac{\hbar\omega}{k_B\zeta(2)^{1/2}} N^{1/2}$$

3d

$$(29) \quad \left( \frac{N_0}{N} \right)_{3d} = 1 - \left( \frac{T}{T_c^{(3d)}} \right)^3 \quad T_c^{(3d)} = \frac{\hbar\omega}{k_B\zeta(3)^{1/3}} N^{1/3}$$

Für  $d = 1$  kann die Summe in (24) numerisch ausgewertet werden für  $z = z_{\max} = 1$

$$S_m = \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega k}} - 1 \right)$$

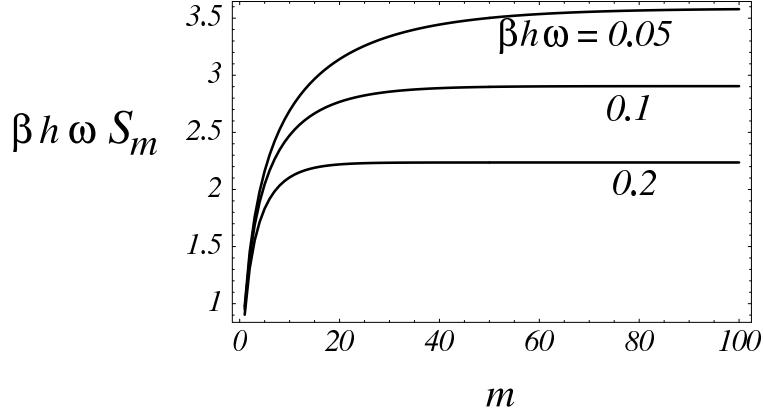


Abbildung 2: Numerische Auswertung von  $\varrho_m$  für verschiedene Werte von  $\hbar\omega$

Diese Summe ist in Abb. 3 dargestellt. D.h. in einem externen harmonischen Potential gibt es auch Bose-Kondensation in 1-D

- Bemerkung:
- $k_B T_c \gg \hbar\omega$  falls  $N \gg 1$   
Kondensation tritt auf, wenn thermische Energie groß gegen Energieabstand
  - obige Diskussion auf Fälle mit unterschiedlichen Frequenzen erweiterbar

$$(30) \quad \omega \rightarrow \bar{\omega} = \sqrt[3]{\omega_x \omega_y \omega_z}$$

Für die Bosekondensation in einer Falle ist neben der Teilchenzahl auch die Teilchenzahldichte von Interesse:

$$(31) \quad \varrho(\vec{r}) = \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle_\beta$$

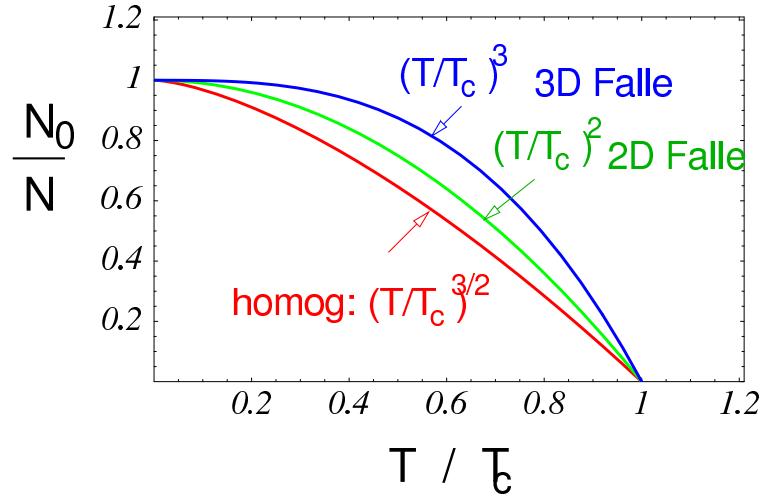


Abbildung 3: Teilchenzahl im Grundzustand als Funktion der Temperatur

In wechselwirkungsfreien Fall gilt

$$(32) \quad \hat{H} = \sum_{\nu} \mathcal{E}_{\nu} \hat{n}_{\nu} \quad \hat{N} = \sum_{\nu} \hat{n}_{\nu}$$

$$(33) \quad \hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{\nu} \varphi_{\nu}(\vec{r}) \hat{b}_{\nu}$$

wobei die  $\varphi_{\nu}(\vec{r})$  die Einteilchenwellenfunktionen des harmonischen Fallenelements sind.

$$(34) \quad \begin{aligned} \varrho(\vec{r}) &= \frac{1}{Z} \sum_{\alpha \lambda} \varphi_{\alpha}^*(\vec{r}) \varphi_{\lambda}(\vec{r}) \text{Tr} \left\{ \underbrace{\hat{b}_{\alpha}^+ \hat{b}_{\lambda} e^{-\beta \sum_{\nu} (\epsilon_{\nu} - \mu) \hat{n}_{\nu}}}_{\sim \delta_{\alpha \lambda}} \right\} \\ &= \sum_{\alpha} |\varphi_{\alpha}(\vec{r})|^2 \langle \hat{n}_{\alpha} \rangle_{\beta} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{\alpha} |\varphi_{\alpha}(\vec{r})|^2 \left( -\frac{\partial}{\partial \epsilon_{\alpha}} Z \right) \frac{1}{\beta} \\ &= -\sum_{\alpha} |\varphi_{\alpha}(\vec{r})|^2 \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_{\alpha}} \\ &= \sum_{\alpha} |\varphi_{\alpha}(\vec{r})|^2 \frac{1}{\frac{1}{z} e^{\beta \epsilon_{\alpha}} - 1} \quad (\text{siehe Gl. 7, 8}) \end{aligned}$$

Für  $z \rightarrow 1$  ist der Term  $\alpha = 0$  ( $\epsilon_0 = 0$ ) dominant

$$(35) \quad \varrho(\vec{r}) \xrightarrow{z \rightarrow 1} |\varphi_0(\vec{r})|^2 \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = |\varphi_0(\vec{r})|^2 N$$

Ein allgemeiner Ausdruck für  $\varrho(\vec{r})$  lässt sich durch Verwendung der Eigenfunktionen des isotropen harmonischen Oszillators finden. Alternativ verwendet man  $|\varphi_{\alpha}(\vec{r})|^2 = \langle \vec{r} | \epsilon_{\alpha} \rangle \langle \epsilon_{\alpha} | \vec{r} \rangle$  und somit

$$(36) \quad \boxed{\varrho(\vec{r}) = \left\langle \vec{r} \left| \frac{1}{\frac{1}{z} e^{\beta \hat{h}} - 1} \right| \vec{r} \right\rangle}$$

wobei  $\hat{h}$  der 1-Teilchenhamiltonoperator abzüglich der Grundzustandsenergie  $3/2\hbar\omega$  ist. Reihenentwicklung und ( $d = 3$ )

$$(37) \quad \langle \vec{r} | e^{-\beta k \hat{h}} | \vec{r} \rangle = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{3/2} (1 - e^{-2\beta k \hbar\omega})^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{m\omega r^2}{\hbar} \tanh \left[ \frac{\beta k \hbar\omega}{2} \right] \right\}$$

liefert

$$(38) \quad \begin{aligned} \varrho(\vec{r}) &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{a_0^3} \sum_{k=1}^{\infty} z^k (1 - e^{-2\beta k \hbar\omega})^{-3/2} \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{r^2}{2a_0^2} \tan h \left[ \frac{\beta k \hbar\omega}{2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$a_0 = \left( \frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{1/2}$  ist der Radius der Grundzustandswellenfunktion.

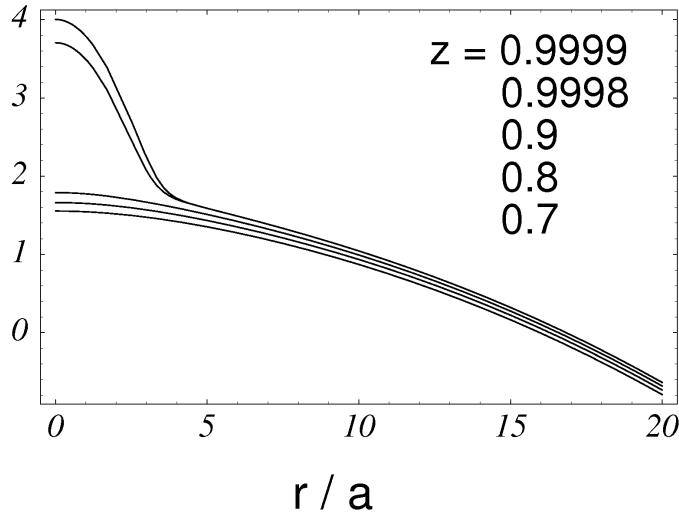


Abbildung 4: Dichte eines idealen Bosegases in einer harmonischen Falle für verschiedene Werte der Fugazität  $z$  für  $k_B T = 20\hbar\omega$  (logarithmische Skala).

Die ausgeprägte Erhöhung der Dichte im Zentrum der Falle ist eine deutliche Signatur der Bosekondensation. Man beachte  $k_B T \gg \hbar\omega$

### (C) Besetzungszahlstatistik im homogenen Kondensat

Für die Wahrscheinlichkeit  $P_\nu^{GC}(n)$  den  $\nu$ ten Energiezustand im großkanonischen Ensemble mit  $n$  Teilchen besetzt zu haben findet man

$$(39) \quad \begin{aligned} P_\nu^{GC}(n) &= {}_\nu \langle n | \text{Tr}_{\kappa \neq \nu} \{ \hat{\varrho}_{GC} \} | n \rangle_\nu \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr}_{\kappa \neq \nu} \{ {}_\nu \langle n | e^{-\beta \sum_\alpha (\epsilon_\alpha - \mu) \hat{n}_\alpha} | n \rangle_\nu \} \\ &= (1 - z e^{-\beta \epsilon_\nu}) e^{-\beta(\epsilon_\nu - \mu)n} = (1 - z e^{-\beta \epsilon_\nu}) z^n e^{-\beta \epsilon_\nu n} \\ \text{denn } Z &= \text{Tr}_\kappa \left\{ e^{-\beta \sum_\alpha (\epsilon_\alpha - \mu) \hat{n}_\alpha} \right\} = \prod_\kappa \frac{1}{1 - z e^{-\beta \epsilon_\kappa}} \end{aligned}$$

mit

$$(40) \quad \langle \hat{n}_\nu \rangle = \frac{1}{\frac{1}{z} e^{\beta \epsilon_\nu} - 1} = \frac{z e^{-\beta \epsilon_\nu}}{1 - z e^{-\beta \epsilon_\nu}}$$

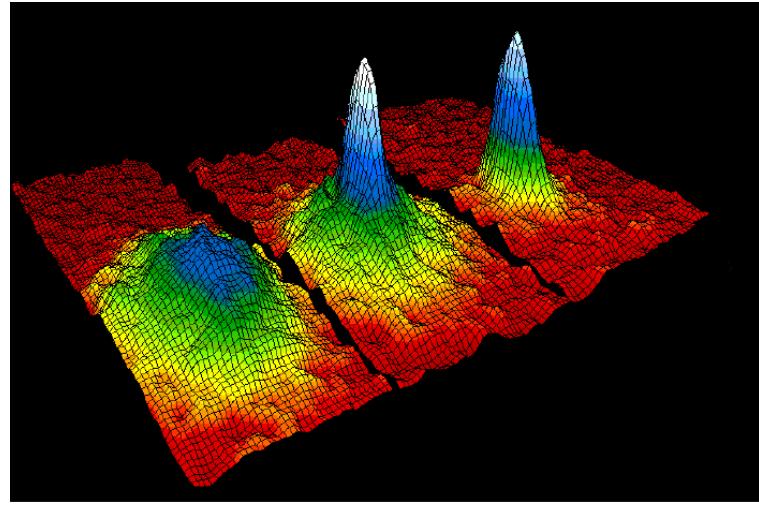


Abbildung 5: Erster experimenteller Nachweis der Bosekondensation von  $Rb$  in einer Falle. Anderson et al. *Science* **269**, 198 (2005).

folgt

$$(41) \quad P_{\nu}^{GC}(n) = \frac{1}{\langle \hat{n}_{\nu} \rangle + 1} \left[ \frac{\langle \hat{n}_{\nu} \rangle}{\langle \hat{n}_{\nu} \rangle + 1} \right]^n$$

Diese Verteilung ist für einen makroskopisch besetzten Grundzustand extrem breit. Die Schwankungsbreite der Teilchenzahl im Grundzustand ist

$$(42) \quad \begin{aligned} \langle \Delta N_0^2 \rangle &= \langle \hat{N}_0^2 \rangle - \langle \hat{N}_0 \rangle^2 \\ &\underset{T \leq T_c}{\sim} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 \right] \langle \hat{N} \rangle^2 \end{aligned}$$

D.h. für  $T \leq T_c$  skaliert  $\langle \Delta N_0^2 \rangle$  wie  $N^2$ ! Dies ist ein Artefakt der großkanonischen Beschreibung, in der die Gesamtteilchenzahl thermische Fluktuationen  $\langle \Delta \hat{N}^2 \rangle \sim \langle \hat{N} \rangle^2$  aufweist. Für  $T \leq T_c$  übertragen sich diese Fluktuationseigenschaften auf den Kondensatzzustand. Im kanonischen bzw. mikrokanonischen Ensemble tritt dieses Problem nicht auf. Die Berechnung physikalischer Größen in diesen Gesamtheiten ist wegen der Einschränkung auf eine fixe Teilchenzahl (kanonisch) bzw. eine fixe Teilchenzahl und eine fixe Energie (mikrokanonisch) jedoch weitaus komplizierter, Z.B. findet man für die kanonische Zustandssumme

$$(43) \quad Z_c = \sum_{n_0=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_0 n_0} \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_1 n_1} \dots \delta_{\sum_{\nu} n_{\nu}, N}$$

welche aufgrund der Delta-Funktion schwierig auszuwerten ist.

#### (D) Einteilchendichtematrix und Impulsverteilung des homogenen idealen Bosegases

In Abschnitt (B) haben wir die 1-Teilchendichte  $\varrho(\vec{r}) = \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle_{\beta}$  kennengelernt. Um alle 1-Teilcheneigenschaften, d.h. z.B. auch die Impulsverteilung  $\varrho(\vec{r})$  berechnen zu

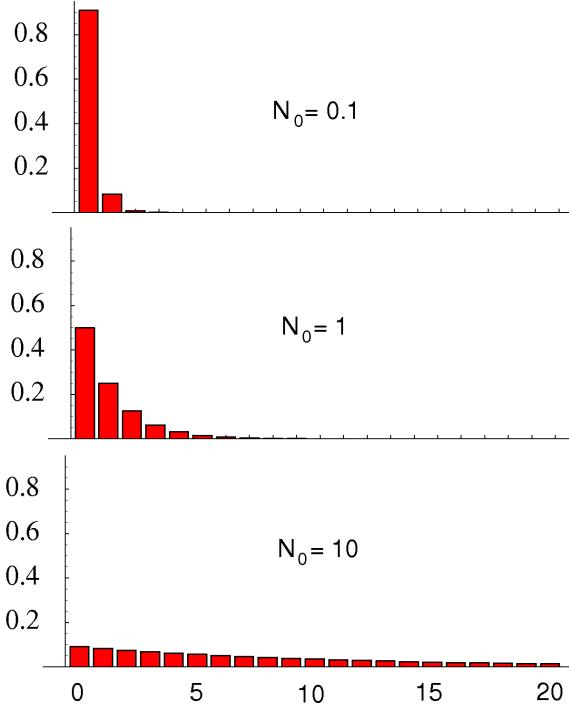


Abbildung 6: Besetzungszahlstatistik  $P_0^{GC}(n)$  im großkanonischen Ensemble mit  $\langle \hat{n}_0 \rangle = N_0$ , oberhalb, bei und unterhalb der kritischen Temperatur.

können, benötigt man die sog. 1-Teilchenmatrix

$$(44) \quad \boxed{\sigma(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}_1) \hat{\Psi}(\vec{r}_2) \rangle_\beta}$$

Für den Fall eines idealen homogenen Bosegases können wir  $\sigma(\Delta \vec{r}) = \sigma(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  leicht berechnen:

$$(45) \quad \sigma(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\alpha} \langle N_{\alpha} \rangle \varphi_{\alpha}^*(\vec{r}_1) \varphi_{\alpha}(\vec{r}_2)$$

Die homogenen Wellenfunktionen sind außer für  $\epsilon_0 = 0$  ebene Wellen  $\frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}$  d.h.

$$(46) \quad \sigma(\Delta \vec{r}) = \frac{\langle N_0 \rangle}{V} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{0^+} d^3 \vec{k} \frac{e^{i \vec{k} \cdot \Delta \vec{r}}}{\frac{1}{z} e^{\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} - 1}$$

Damit erhält man für die Impulsverteilung

$$(47) \quad \begin{aligned} \varrho(\vec{p}) &= \frac{V}{(2n\hbar)^3} \int_V d^3 \vec{\xi} \sigma(\vec{\xi}) e^{-i \vec{p} \cdot \vec{\xi} / \hbar} \\ &= N_0 \delta(\vec{p}) + \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{\beta \left( \frac{p^2}{2m} - \mu \right)} - 1} \end{aligned}$$

Das Auftreten eines singulären Anteils  $\delta(\vec{p})$  ist ein Ausdruck der Bosekondensation.