
Allgemeine Hinweise: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind als Hausaufgaben zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Briefkasten im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

☗ **Aufgabe 32. (6 Punkte)**

Gegeben sind zwei Teilsysteme A und B mit jeweils vielen Mikrozuständen $|a\rangle$, $|b\rangle$ und entsprechenden Wahrscheinlichkeiten P_a, P_b. Die Entropie der Teilsysteme ist $S_A = -k_B \sum_a P_a \ln P_a$ und $S_B = -k_B \sum_b P_b \ln P_b$.

(a) Zeigen Sie, dass die Entropie additiv ist, d.h.,

$$S = -k_B \sum_{a,b} P_{ab} \ln P_{ab} = S_A + S_B, \tag{1}$$

wenn die Systeme unabhängig sind (d.h., wenn $P_{ab} = P_a P_b$).

(b) Wenn die Systeme nicht unabhängig voneinander sind, dann gilt $P_a = \sum_b P_{ab}$ und $P_b = \sum_a P_{ab}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$S - S_A - S_B = k_B \sum_{a,b} P_{ab} \ln \frac{P_a P_b}{P_{ab}}. \tag{2}$$

Ist der Entropieunterschied positiv oder negativ (mit Beweis)? Was bedeutet das für Systeme mit Wechselwirkungen?

Aufgabe 33.

Die Moleküle eines zweiatomigen Gases besitzen die gequantelten Rotationsniveaus

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I} r(r+1) \tag{3}$$

wobei $r = 0, 1, 2, \ldots$. I ist dabei das (konstante) Trägheitsmoment des Moleküls und das Niveau E_r ist $(2r+1)$-fach entartet.

(a) Geben Sie einen Ausdruck für die kanonische Zustandssumme Z_{rot} der Rotationsbewegung an. *Hinweis:* Die Zustandssumme ist eine Spur über alle Zustände, d.h., der Entartungsgrad muss berücksichtigt werden.

(b) Leiten Sie daraus den Rotationsbeitrag zur Wärmekapazität bei konstantem Volumen C_V^{rot} für sehr hohe und sehr niedrige Temperaturen ab.

Aufgabe 34.

Gegeben sei ein würfelförmiges Volumen $V = L^3$ mit einem klassischen idealen Gas aus N identischen Atomen. Nun werde zusätzlich angenommen, dass die Teilchen einen inneren Freiheitsgrad (Spin $S = 1/2$) haben, verbunden mit einem magnetischen Moment μ. Es werde ein magnetisches Feld B angelegt.

(a) Begründen Sie mit wenigen Worten, warum die kanonische Zustandssumme die Form

$$Z_N = \frac{1}{N!} (Z_{1,\mathrm{trans}})^N (Z_{1,\mathrm{int}})^N \tag{4}$$

hat, wobei $Z_{1,\mathrm{trans}}$ den Translationsanteil und $Z_{1,\mathrm{int}}$ den internen Anteil der Zustandssumme bezeichnet. Warum taucht der Faktor $1/N!$ auf?

Bitte wenden!

(b) Berechnen Sie Z_N.

(c) Berechnen Sie die innere Energie U und die Wärmekapazität C_V.

(d) Berechnen Sie die Magnetisierung M.