Allgemeine Hinweise: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind als Hausaufgaben zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Briefkasten im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

Aufgabe 22.
In der Thermodynamik betrachtet man häufig Variationen von Zustandsgrößen bei festgehaltenen anderen Zustandsgrößen. In dieser Aufgabe sollen einige in diesem Zusammenhang wichtige Formeln vorgestellt werden.
Betrachten Sie die Variation der Zustandsgrößen x, y und z unter der Nebenbedingung $\Psi(x, y, z) =$ konstant. Im Folgenden bezeichnet $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{\Psi,z}$ die partielle Ableitung von x nach y unter der Nebenbedingung, dass Ψ und z konstant gehalten werden.

(a) Zeigen Sie:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{\Psi,z} = -\frac{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_{x,z}}{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{y,z}}. \tag{1}$$

analog gilt:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{\Psi,x} = -\frac{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_{x,y}}{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_{x,z}}, \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\Psi,y} = -\frac{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{y,z}}{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_{x,y}}. \tag{3}$$

Diese drei Gleichungen ergeben zusammen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{\Psi,z}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{\Psi,x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\Psi,y} = -1. \tag{4}$$

(b) Zeigen Sie:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\Psi,z} = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{\Psi,z}}. \tag{5}$$

(c) Seien nun x, y und z eine Funktion der Variable t. Drücken Sie $\mathrm{d}\Psi$ durch $\mathrm{d}t$ aus und verwenden Sie $\mathrm{d}\Psi = 0$ (wegen der Nebenbedingung $\Psi =$ konstant) um zu zeigen:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\Psi,z} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\Psi,z}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\Psi,z}}. \tag{6}$$

☗ **Aufgabe 23.** (6 Punkte)
Für eine homogene Substanz (Photonengas) gelten die folgenden Zustandsgleichungen:

$$U(V,T) = 3AVT^4, \qquad p(V,T) = AT^4. \tag{7}$$

(a) Man berechne die Wärmekapazitäten C_V und C_p. Wie kann das Resultat für C_p auch ohne Rechnung erhalten werden?

Bitte wenden!

(b) Man drücke die infinitesimale zugeführte Wärme $đQ$ durch dT und dV aus, d.h. man berechne in $đQ = f(V,T)dT + g(V,T)dV$ die Funktionen $f(V,T)$ und $g(V,T)$. Man zeige explizit, dass T ein integrierender Nenner von $đQ$ ist und berechne die Funktion S mit $dS = \frac{đQ}{T}$.

Aufgabe 24.

Der *isobare Ausdehungskoeffizient* α und die *isotherme Kompressibilität* κ werden wie folgt definiert: (machen Sie sich das anschaulich klar!)

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \qquad \kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T. \tag{8}$$

Experimentell werden folgende Abhängigkeiten von der Temperatur T und dem Volumen V gefunden:

$$\alpha = \frac{kV^2(V-Nb)}{kTV^3 - 2aN(V-Nb)^2}, \tag{9}$$

$$\kappa = \frac{V^2(V-Nb)^2}{NkTV^3 - 2aN^2(V-Nb)^2}, \tag{10}$$

wobei a und b Konstanten seien. Für große T und V und konstantes N verhalte sich die Substanz wie ein ideales Gas. Leiten Sie die thermische Zustandsgleichung $p = p(V,T)$ der Substanz ab.