Allgemeine Hinweise: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind als Hausaufgaben zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Briefkasten im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

☗ **Aufgabe 19.** *Spinpräzession (6 Punkte)*

Man betrachte ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}(t) = (0, 0, B(t))$. Bei Vernachlässigung der Bewegung des Teilchens lautet der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{2\mu}{\hbar}\vec{B}(t) \cdot \hat{\vec{S}}. \tag{1}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Zustand des Teilchens gegeben durch den zwei-komponentigen Vektor

$$|\psi(0)\rangle = \alpha\,|\chi_+\rangle + \beta\,|\chi_-\rangle,$$

wobei $|\chi_+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $|\chi_-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ die Eigenzustände von $\hat{S}_z$ mit Eigenwerten $\pm\hbar/2$ bedeuten. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{S}_x(t)\rangle = \langle\psi(t)|\,\hat{S}_x\,|\psi(t)\rangle$, $\langle \hat{S}_y(t)\rangle$ und $\langle \hat{S}_z(t)\rangle$. Lösen Sie dazu die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle$$

mit dem Ansatz $|\psi(t)\rangle = \alpha(t)\,|\chi_+\rangle + \beta(t)\,|\chi_-\rangle$.

Aufgabe 20. *magnetische Resonanz*

Man betrachte wiederum ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen in einem äußeren Magnetfeld aus der vorherigen Aufgabe. Es sei nun $\vec{B}(t) = (B_\perp \cos\omega t, -B_\perp \sin\omega t, B_\parallel)$. Der Zustand des Teilchens zur Zeit t kann in der Form

$$|\chi(t)\rangle = a(t)\,|\chi_+\rangle + b(t)\,|\chi_-\rangle$$

geschrieben werden.

(a) Zeigen Sie, dass aus der Schrödingergleichung für $|\chi(t)\rangle$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ aus Gleichung (1) die Matrixgleichung folgt

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}\Omega_\parallel & \Omega_\perp \mathrm{e}^{i\omega t}\\ \Omega_\perp \mathrm{e}^{-i\omega t} & -\Omega_\parallel\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\end{pmatrix} \tag{2}$$

mit $\hbar\Omega_\parallel = \mu B_\parallel$ und $\hbar\Omega_\perp = \mu B_\perp$.

(b) Lösen Sie (2) mit den Anfangsbedingungen $a(0) = 1$, $b(0) = 0$. (*Hinweis:* Nehmen Sie die Substitution $a = \tilde{a}\mathrm{e}^{i\omega t}$ vor und diagonalisieren Sie die entstehende zeitunabhängige 2×2 Matrix.)

(c) Unter welcher Bedingung an die Frequenz ω und zu welchen Zeiten gilt $|\chi(t)\rangle = |\chi_-\rangle$?

Bitte wenden!

Aufgabe 21. *Radialimpuls*

Zeigen Sie, dass für den Operator des Abstandes vom Ursprung $\hat{r}$ und die Radialkomponente des Impulses $\hat{p}_r$ gilt

$$[\hat{r}, \hat{p}_r] = i\hbar$$
$$\left[\hat{p}_r, \hat{\vec{L}}^2\right] = 0.$$