
Allgemeine Hinweise: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind als Hausaufgaben zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Briefkasten im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

Aufgabe 13. *Operatoren (4 Punkte)*

Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ zwei Operatoren. Zeigen Sie:

☗ **(a)**

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$$
$$\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B}$$
$$\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D}\right] = \hat{A}\hat{C}\left[\hat{B}, \hat{D}\right] + \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right]\hat{D} + \hat{C}\left[\hat{A}, \hat{D}\right]\hat{B} + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{D}\hat{B}.$$

☗ **(b)** Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ nun hermitesche Operatoren. Zeigen Sie, dass

$$i\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$$

hermitesch ist.

(c) Es sei $\hat{K}$ ein selbstadjungierter Operator mit einem diskreten Spektrum $\sigma_P(\hat{K}) = \{k_1, k_2, k_3, \dots\}$. Welche Eigenschaft hat der Operator $A = \mathrm{e}^{i\hat{K}}$? Wodurch ist sein Spektrum charakterisiert?

☗ **Aufgabe 14.** *Baker-Hausdorff-Theorem (6 Punkte)*

(a) Man zeige, dass für beliebige Operatoren $\hat{A}$ und$\hat{B}$ und komplexe Zahlen x gilt:

$$\mathrm{e}^{x\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-x\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]x + \frac{1}{2!}\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right]x^2 + \dots \tag{1}$$

Hinweis: Man betrachte die Taylorreihenentwicklung der Funktion $\hat{f}(x) = \mathrm{e}^{x\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-x\hat{A}}$

(b) Unter Verwendung von Gleichung (1) beweise man das Baker-Hausdorff-Theorem:

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]} = \mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]}$$

falls $\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = \left[\hat{B}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0.$

Hinweis: Man betrachte die Funktion $\hat{f}(x) = \mathrm{e}^{x\hat{A}}\mathrm{e}^{x\hat{B}}$ und finde für diese eine Differentialgleichung erster Ordnung durch Ableiten von $\hat{f}$ und der Verwendung von $\mathrm{e}^{-x\hat{A}}\mathrm{e}^{+x\hat{A}} = \mathbb{1}$.

Aufgabe 15. *Orbitale*

Die Matrizen

$$\hat{L}_x \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_y \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{L}_z \equiv \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

stellen die räumlichen Komponenten des Drehimpulses für $l = 1$ in der Basis der Eigenzustände $|m = -1\rangle$, $|m = 0\rangle$ und $|m = -1\rangle$ von $\hat{L}_z$ dar.

Bitte wenden!

(a) Zeigen Sie, dass der Eigenwert von $\hat{\vec{L}}^2$ tatsächlich $\hbar^2 l(l+1)$ mit $l = 1$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ jeweils zum Eigenwert $m = 0$. Zeigen Sie, dass dieser Satz von Vektoren eine orthogonale, vollständige Basis bildet.