

Allgemeine Hinweise: Die mit \blacktriangle gekennzeichneten Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind als Hausaufgaben zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Briefkasten im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

Aufgabe 10. Kohärente Zustände 1

Zeigen Sie, dass für die kohärenten Zustände des harmonischen Oszillators

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle &= l_0 \sqrt{2} \operatorname{Re}(\alpha), \\ \langle \hat{p} \rangle &= p_0 \sqrt{2} \operatorname{Im}(\alpha), \\ \frac{\langle \Delta \hat{x}^2 \rangle}{l_0^2} &= \frac{\langle \Delta \hat{p}^2 \rangle}{p_0^2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

wobei $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ die Standardlänge des Oszillators bedeutet und $p_0 = \hbar/l_0$.

\blacktriangle Aufgabe 11. Kohärente Zustände 2 (6 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände normiert sind, d.h. $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$, jedoch nicht orthogonal. Was ist $\langle \alpha | \beta \rangle$?
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Baker-Hausdorff Theorems

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$$

(falls $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$), dass für kohärenten Zustand

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) |0\rangle$$

gilt, wobei $|0\rangle$ der Eigenzustand von $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ zum Eigenwert 0 bedeutet.

Aufgabe 12. Gekoppelte Oszillatoren; Normalkoordinaten

In der Vorlesung wurden die Eigenwerte des harmonischen Oszillators hergeleitet. Gegeben seien nun zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren mit

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) + \gamma m\omega^2 \hat{x}_1 \hat{x}_2,$$

wobei $0 < \gamma < 1$ den Kopplungsgrad charakterisiert.

- (a) Wie lauten die Energieeigenwerte für verschwindende Kopplung ($\gamma = 0$)? Welchen Entartungsgrad besitzen die zugehörigen Eigenfunktionen, d.h. wieviel verschiedene Eigenfunktionen gibt es zu jedem Eigenwert?

Bitte wenden!

- (b)** Führen Sie die durch $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)$ und $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)$ definierten neuen Variablen ξ und η ein. Wie lautet der Hamiltonoperator in diesen neuen Koordinaten und den zugehörigen Impulsen?
- (c)** Berechnen Sie die Eigenwerte für $\gamma \neq 0$. Zeigen Sie, dass der Kopplungsterm i.A. die in **(a)** gefundene Entartung aufhebt.