Allgemeine Hinweise: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind als Hausaufgaben zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Briefkasten im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

☗ **Aufgabe 4.** *Freier Fall 1 (6 Punkte)*
Die eindimensionale Schrödingergleichung bei Vorhandensein einer konstanten Kraft $F = -mg$ (freier Fall) lautet:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + mgx\right]\psi(x,t).$$

(a) Leiten Sie aus der obigen Gleichung eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Wellenfunktion im k-Raum $\widetilde{\psi}(k,t)$ ab.

(b) Zeigen Sie, dass diese partielle Differentialgleichung für die Wellenfunktion im k-Raum mit der Substitution $k = k_0 + \frac{mg}{\hbar}t$ in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\psi}(k_0 + \frac{mg}{\hbar}t, t) = -i\frac{\hbar}{2m}(k_0 + \frac{mg}{\hbar}t)^2\widetilde{\psi}(k_0 + \frac{mg}{\hbar}t, t)$$

übergeht.

(c) Berechnen Sie $\widetilde{\psi}(k,t)$ und zeigen Sie, dass der mittlere Impuls $\langle\hat{p}\rangle = \hbar\langle k\rangle$ des Teilchens eine lineare Funktion der Zeit ist.

Aufgabe 5. *Freier Fall 2*
Es werde erneut das Problem aus Aufgabe 4 betrachtet.

(a) Man zeige, dass die stationäre Wellenfunktion zur Energie E gegeben ist durch

$$\phi_E(x) = \mathcal{N}\,\mathrm{Ai}\left(\frac{x}{l_0} - \frac{E}{\epsilon_0}\right).$$

Hierbei ist $\mathcal{N}$ eine Normierungskonstante und $l_0 = (\hbar^2/2m^2g)^{1/3}$ und $\epsilon_0 = (\hbar^2 mg^2/2)^{1/3}$ sind die Standardlänge und -energie.

$$\mathrm{Ai}(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(i(yx + \frac{1}{3}y^3)\right)$$

ist Airysche Funktion. Zeigen Sie erst, dass diese der Differentialgleichung

$$\mathrm{Ai}''(x) - x\mathrm{Ai}(x) = 0$$

genügt. Ihre kleinsten Nullstellen sind -2.3381, -4.0879, -5.52055.

(b) Nun falle das Teilchen auf eine harte Oberfläche bei $x = 0$, d.h. das Potential sei

$$V(x) = \begin{cases} mgx & \text{für } x > 0 \\ +\infty & \text{für } x \le 0. \end{cases}$$

Was muss für $\phi(x)$ für $x \le 0$ gelten? Was folgt daraus für die erlaubten Energiewerte, wenn man für $x > 0$ den obigen Ansatz für die Wellenfunktion verwendet?

Bitte wenden!

Aufgabe 6. *Unendliches Kastenpotential*
Gegeben sei ein eindimensionales Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden. D.h.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die stationären Wellenfunktionen $\phi_n(x)$ und die zugehörigen Energieeigenwerte E_n sind in der Vorlesung berechnet worden.

(a) Zeigen Sie,dass die allgemeine zeitabhängige Lösung der Schrödingergleichung mit der Anfangsbedingung $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$ in der Form

$$\psi(x, t) = \sum_n \alpha_n \phi_n(x) \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

geschrieben werden kann. Wodurch sind die α_n bestimmt?

(b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Wellenfunktion durch $\psi(x, t = 0) = \psi_0(x)$. Zeigen Sie, dass nach einer halben Periode der Grundschwingung $T/2$ die Funktion in ihr Spiegelbild bezüglich $x = L/2$ übergeht, d.h. dass gilt $\psi(x, T/2) = -\psi(L - x, 0) = -\psi_0(L - x)$. Was passiert nach Vielfachen von T?