

Aufgabe 1. Zur Wiederholung: Fouriertransformation

Die Funktionen

$$f_1(x) = \begin{cases} N_1 \sin(kx) & \text{für } |x| \leq n\pi/k \text{ mit } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$f_2(x) = N_2 e^{-(x/a)^2} \cos(kx),$$

$$f_3(x) = \frac{N_3}{x^2 + a^2} \sin(kx).$$

beschreiben Wellenpakete zu einer festen Zeit.

- (a)** Bestimmen Sie die Normierungskonstanten N_1 , N_2 und N_3 , so dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = 1.$$

- (b)** Bestimmen Sie die Fouriertransformierte (Wellenfunktion im k Raum)

$$\tilde{f}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$

(Hinweis: f_2 komplexes Gaußsches Integral, f_3 Residuenintegration)

- (c)** Finden Sie geeignete Größen zur Charakterisierung der x - und k -Ausdehnung der Wellenpakete, Δx und Δk . Wie groß ist jeweils $\Delta x \Delta k$?

Aufgabe 2. Erwartungswerte

Es ist oft nützlich, neben der Wellenfunktion im Ortsraum auch die Fouriertransformierte Wellenfunktion im k -Raum zu betrachten. In einer Dimension gilt:

$$\tilde{\psi}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \psi(x).$$

Zeigen Sie, dass für die Mittelwerte von x^n und k^n gilt:

$$\langle x^n \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n |\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\psi}^*(k, t) \left(i \frac{\partial}{\partial k} \right)^n \tilde{\psi}(k, t),$$

$$\langle k^n \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk k^n |\tilde{\psi}(k, t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x, t) \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x, t).$$

Aufgabe 3.

Betrachten Sie ein Wellenpaket in einer Dimension

$$\tilde{\psi}(k, 0) = A e^{-\frac{k^2}{4\sigma_k^2}}.$$

Verifizieren Sie die in der Vorlesung gefundenen Ergebnisse:

$$\psi(x, 0) = \frac{A\sigma_k}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2\sigma_k^2} = \frac{A}{2\sigma_x\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma_x^2}}$$

mit $\sigma_x = 1/2\sigma_k$, sowie

$$\psi(x, t) = \frac{A}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma_x^2 + \frac{i\hbar t}{2m}}} e^{-\frac{x^2}{4(\sigma_x^2 + \frac{i\hbar t}{2m})}}.$$

Zeigen Sie ferner

$$\begin{aligned}\Delta x(t)^2 &= \Delta x(0)^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \Delta x(0)^2} \\ \Delta p(t)^2 &= \Delta p(0)^2.\end{aligned}$$