Allgemeiner Hinweis: Die mit ⬆ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind als Hausaufgaben zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Briefkasten im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

⬆ **Aufgabe 19.** *Radialimpuls* (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass für den Operator des Abstandes vom Ursprung $\hat{r}$ und die Radialkomponente des Impulses $\hat{p}_r$ gilt

$$\left[\hat{r}\,,\,\hat{p}_r\right] = i\hbar \tag{1}$$

$$\left[\hat{p}_r\,,\,\hat{\vec{L}}^2\right] = 0 \tag{2}$$

Aufgabe 20. *Spinpräzession*
Man betrachte ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}(t) = (0, 0, B(t))$. Bei Vernachlässigung der Bewegung des Teilchens lautet der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{2\mu}{\hbar}\vec{B}(t)\cdot\vec{S}. \tag{3}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Zustand des Teilchens gegeben durch den zwei-komponentigen Vektor

$$|\psi(0)\rangle = \alpha_0\,|\chi_+\rangle + \beta_0\,|\chi_-\rangle\,, \tag{4}$$

wobei $|\chi_+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $|\chi_-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ die Eigenzustände von $\hat{S}_z$ mit Eigenwerten $\pm\hbar/2$ sind.
Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{S}_x(t)\rangle = \langle\psi(t)|\,\hat{S}_x\,|\psi(t)\rangle$, $\langle\hat{S}_y(t)\rangle$ und $\langle\hat{S}_z(t)\rangle$. Lösen Sie dazu die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle \tag{5}$$

mit dem Ansatz

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)\,|\chi_+\rangle + \beta(t)\,|\chi_-\rangle\,. \tag{6}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 21. *Quantenpunkt* (6 Punkte)
Ein kugelförmiger Halbleiter-Quantenpunkt kann durch ein freies Elektronengas in einem Zentralpotential

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r \leq R \\ \infty & \text{für } r > R \end{cases} \tag{7}$$

beschrieben werden. Bestimmen Sie die stationären Zustände der Einteilchen Schrödingergleichung im Potential $V(r)$ und die zugehörige Energien. Wie groß ist der Entartungsgrad der Eigenzustände?