Allgemeiner Hinweis: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind als Hausaufgaben zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Briefkasten im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

Aufgabe 13. *Operatoren (4 Punkte)*
Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ und $\hat{D}$ Operatoren. Zeigen Sie:

☗ **(a)**

$$\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger} \tag{1}$$

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B} \tag{2}$$

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\hat{D}\right] = \hat{A}\hat{C}\left[\hat{B},\hat{D}\right] + \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right]\hat{D} + \hat{C}\left[\hat{A},\hat{D}\right]\hat{B} + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{D}\hat{B}. \tag{3}$$

☗ **(b)** Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ nun hermetische Operatoren. Zeigen sie, dass

$$i\left[\hat{A},\hat{B}\right] \tag{4}$$

hermitesch ist.

(c) Es sei $\hat{K}$ ein selbstadjungierter Operator mit einem diskreten Spektrum $\sigma_P\left(\hat{K}\right) = \{k_1, k_2, k_3, ...\}$. Welche Eigenschaften hat der Operator $A = e^{i\hat{K}}$? Wodurch ist sein Spektrum charakterisiert?

Aufgabe 14. *Baker-Hausdorff-Theorem*

(a) Man zeige, dass für beliebige Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ und komplexe Zahlen x gilt:

$$e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A},\hat{B}\right]x + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]x^2 + \dots. \tag{5}$$

Hinweis: Man betrachte die Taylorreihenentwicklung der Funktion $\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}}$

(b) Unter Verwendung von Gleichung (5) beweise man das Baker-Hausdorff-Theorem

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]} = e^{\hat{A}+\hat{B}}\ e^{\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]}, \tag{6}$$

falls $\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = \left[\hat{B},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = 0$.

Hinweis: Man betrachte die Funktion $\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}}$ und finde für diese eine Differentialgleichung erster Ordnung durch Ableiten von $\hat{f}$ und der Verwendung von $e^{-x\hat{A}}e^{x\hat{A}} = \mathbb{1}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 15. *Drehimpuls-Leiteroperatoren (6 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\hat{\vec{L}}^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+\right) + \hat{L}_z^2, \tag{7}$$

wobei die $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y$ die Leiteroperatoren des Bahndrehimpulses bedeuten.

(b) Leiten Sie mit Hilfe der Darstellung der Drehimpulsoperatoren $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ in sphärischen Polarkoordinaten die Polarkoordinatendarstellung der Leiteroperatoren her.

(c) Leiten Sie mit Hilfe vom (7) die Darstellung von $\hat{\vec{L}}^2$ in spärischen Polarkoordinaten her und zeigen Sie damit, dass sich der 3-dimensionale Laplaceoperator in Kugelkoordinaten durch $\hat{\vec{L}}^2$ ausdrücken lässt:

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{\vec{L}}^2}{\hbar^2 r^2} \tag{8}$$