**Allgemeiner Hinweis:** Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind als Hausaufgaben zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Briefkasten im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

**Aufgabe 10.** *Kohärente Zustände 1 (6 Punkte)*
Zeigen Sie, dass für die kohärenten Zustände des harmonischen Oszillators

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{1}$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle$ gilt:

$$\langle \hat{x} \rangle = l_0 \sqrt{2}\, \mathrm{Re}(\alpha) \tag{2}$$

$$\langle \hat{p} \rangle = p_0 \sqrt{2}\, \mathrm{Im}(\alpha) \tag{3}$$

$$\frac{\langle \Delta \hat{x}^2 \rangle}{l_0^2} = \frac{\langle \Delta \hat{p}^2 \rangle}{p_0^2} = \frac{1}{2} \tag{4}$$

wobei $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ die Standardlänge des Oszillators ist und $p_0 = \hbar/l_0$.

☗ **Aufgabe 11.** *Kohärente Zustände 2 (6 Punkte)*

**(a)** Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände normiert sind, d.h. $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$, jedoch nicht orthogonal. Was ist $\langle \alpha | \beta \rangle$?

**(b)** Zeigen Sie mit Hilfe des Baker-Hausdorff Theorems

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}\, e^{\hat{B}}\, e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \tag{5}$$

falls $\left[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]\right] = \left[\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]\right] = 0$, dass für einen kohärenten Zustand gilt:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}\right) |0\rangle\,, \tag{6}$$

wobei $|0\rangle$ der Eigenzustand von $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ zum Eigenwert 0 ist.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 12.** *Gekoppelte Oszillatoren; Normalkoordinaten*

In der Vorlesung wurden die Eigenwerte des harmonischen Oszillators hergeleitet. Gegeben seien nun zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren mit

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right) + \gamma m\omega^2 \hat{x}_1 \hat{x}_2, \tag{7}$$

wobei $0 < \gamma < 1$ den Kopplungsgrad charakterisiert.

**(a)** Wie lauten die Energieeigenwerte für verschwindende Kopplung ($\gamma = 0$)? Welchen Entartungsgrad besitzen die zugehörigen Eigenfunktionen, d.h. wieviel verschiedene Eigenfunktionen gibt es zu jedem Eigenwert?

**(b)** Führen Sie die durch $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)$ und $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)$ definierten neuen Variablen $\xi$ und $\eta$ ein. Wie lautet der Hamiltonoperator in diesen neuen Koordinaten und den zugehörigen Impulsen?

**(c)** Berechnen Sie die Eigenwerte für $\gamma \neq 0$. Zeigen Sie, dass der Kopplungsterm i.Allg. die in (a) gefundene Entartung aufhebt.