Allgemeiner Hinweis: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind als Hausaufgaben zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Briefkasten im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

☗ **Aufgabe 7.** *Doppel-Delta Potential (6 Punkte)*
Es werden zwei identische Delta Potentiale im Abstand d voneinander betrachtet:

$$V(x) = -F\left[\delta\left(x - \frac{d}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{d}{2}\right)\right] \tag{1}$$

wobei $F > 0$ sei. Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung in den drei Teilgebieten $-\infty < x \leq -d/2$, $-d/2 \leq x \leq d/2$ und $d/2 \leq x < \infty$. Finden Sie die gebundenen Zustände und die dazugehörigen Energien.

Aufgabe 8. Inverses Problem
Die Wellenfunktion

$$\phi_E(x) = A\left(\frac{x}{x_0}\right)^n \exp\left(-\frac{x}{x_0}\right) \tag{2}$$

mit $x \geq 0$ sei eine Lösung der stationären Schrödingergleichung im Bereich $x \geq 0$. A, x_0 und n seien positive Konstanten. Man bestimme das zugehörige Potential $V(x)$, wenn gilt $\lim_{x\to\infty} V(x) = 0$.

☗ **Aufgabe 9.** Das Ehrenfestsche Theorem (6 Punkte)
Betrachtet werde ein quantenmechanisches Teilchen in einem Potential $V(\vec{r})$. Die klassische Kraft auf das Teilchen ist $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$.

(a) Zeigen Sie, z.B. durch Auswertung der Wirkung auf eine beliebige Wellenfunktion $\varphi(\vec{r})$, dass in Ortsdarstellung gilt

$$\left[\hat{H}, \hat{\vec{r}}\right] = \frac{\hbar}{i\,m}\hat{\vec{p}} \tag{3}$$

$$\left[\hat{H}, \hat{\vec{p}}\right] = -\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}V(\hat{\vec{r}}) = \frac{\hbar}{i}\vec{F}(\hat{\vec{r}}) \tag{4}$$

(b) Leiten Sie die sogenannten Ehrenfestschen Gleichungen für den Erwartungswert des Orts $\langle\hat{\vec{r}}\rangle$ und den Erwartungswert des Impulses $\langle\hat{\vec{p}}\rangle$ her:

$$m\frac{d}{dt}\langle\hat{\vec{r}}\rangle = \langle\hat{\vec{p}}\rangle \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\vec{p}}\rangle = \langle\vec{F}(\hat{\vec{r}})\rangle\,. \tag{6}$$

Hinweis: Es gilt $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$ und $-i\hbar\frac{d}{dt}\langle\psi(t)| = \langle\psi(t)|\hat{H}$.

(c) Unter welchen Bedingungen gelten für $\langle\hat{\vec{r}}\rangle$ und $\langle\hat{\vec{p}}\rangle$ dieselben Bewegungsgleichungen wie für $\vec{r}$ und $\vec{p}$ in der klassischen Mechanik?