Aufgabe 1. *Zur Wiederholung: Fouriertransformation*
Die Funktionen

$$f_1(x) = \begin{cases} N_1 \sin(k_0 x) & \text{für } |x| \leq n\pi/k_0 \text{ mit } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{1}$$

$$f_2(x) = N_2\, e^{-(x/a)^2} \cos(k_0 x), \tag{2}$$

beschreiben Wellenpakete zu einer festen Zeit.

(a) Bestimmen Sie die Normierungskonstanten N_1 und N_2, sodass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 = 1. \tag{3}$$

(*Hinweis*: f_2 komplexes Gaußsches Integral)

(b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte (Wellenfunktion im k Raum)

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x) \tag{4}$$

(c) Finden Sie geeignete Größen zur Charakterisierung der x- und k-Ausdehnung der Wellenpakete, Δx und Δk. Wie groß ist jeweils $\Delta x\, \Delta k$?

Aufgabe 2. *Erwartungswerte*
Es ist oft nützlich, neben der Wellenfunktion im Ortsraum auch die Fouriertransformierte Wellenfunktion im k-Raum zu betrachten. In einer Dimension gilt:

$$\tilde{\psi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-ikx} \psi(x). \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass für die Erwartungswerte von x^n und k^n gilt:

$$\langle x^n \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ x^n |\psi(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ \tilde{\psi}^*(k) \left(i \frac{\partial}{\partial k} \right)^n \tilde{\psi}(k), \tag{6}$$

$$\langle k^n \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ k^n |\tilde{\psi}(k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \psi^*(x) \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x). \tag{7}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3.
Betrachten Sie ein Wellenpaket in einer Dimension

$$\tilde{\psi}(k,0) = A \exp\left(-\frac{k^2}{4\sigma_k^2}\right). \tag{8}$$

Verifizieren Sie die in der Vorlesung gefundenen Ergebnisse:

$$\begin{aligned}\psi(x,0) &= \frac{A\sigma_k}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-x^2\sigma_k^2\right) \\ &= \frac{A}{2\sigma_x\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{4\sigma_k^2}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

mit $\sigma_x = 1/2\sigma_k$, sowie

$$\psi(x,t) = \frac{A}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma_x^2 + \frac{i\hbar t}{2m}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\left(\sigma_x^2 + \frac{i\hbar t}{2m}\right)}\right). \tag{10}$$

Zeigen Sie ferner

$$\Delta x(t)^2 = \Delta x(0)^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \Delta x(0)^2} \tag{11}$$

$$\Delta p(t)^2 = \Delta p(0)^2. \tag{12}$$