

IV. Relativistische Mechanik

IV.1. Inertialsysteme, Galileitransformationen und Lorentztransformationen

1. Newton Axiom:

2. Newton Axiom:

$\exists$ ein Inertialsystem
in einem Inertialsystem

$$m \vec{\ddot{r}} = \vec{F}$$

► Transformation zwischen Inertialsystemen?

(310)

$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow \vec{r}' = R \vec{r} + \vec{u} t + \vec{a} \\ t &\rightarrow t' = \lambda t + t_0 \end{aligned}$$

R orthogonale
Matrix in $\mathbb{R}^3$

$R, \vec{u}, \vec{a}$ konstant t

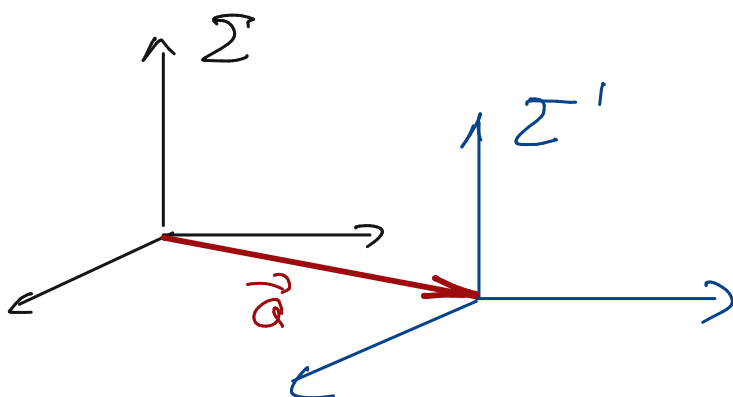
$$R \in O(3)$$

$$\det(R) = \pm 1$$

$$\lambda = \pm 1$$

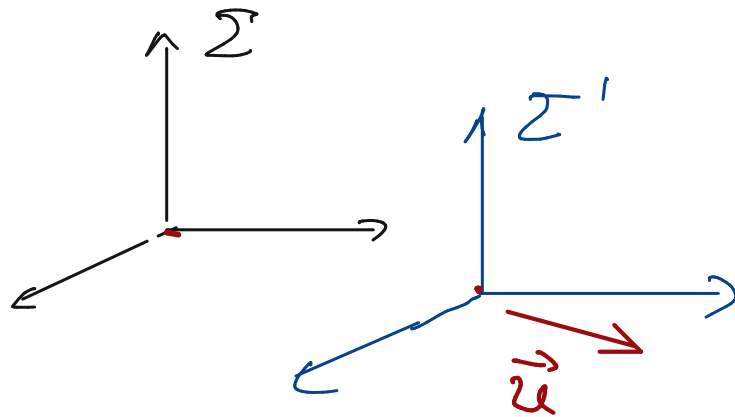
(i) Verschiebung des Koordinatenursprungs

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$$



(ii) gleichförmige Relativbewegung mit $\vec{u}$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u} t$$



(iii) zeitlich konstante (!) Drehung im Raum ($\det R = 1$)
oder Drehung plus Raumspiegelung ($\det R = -1$)

$$\vec{r}' = R \vec{r} \quad R \text{ reell}$$

$$(\vec{r}')^2 \stackrel{!}{=} (\vec{r})^2 \quad \text{Länge erhalten}$$

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j \quad \sum_{i=1}^3 (x'_i)^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{e=1}^3 R_{ik} R_{ie} x_k x_e$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^3 (x_k)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^3 R_{ik} R_{ie} = \delta_{ke} \quad \text{d.h.} \quad R R^T = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow R^{-1} = R^T \quad \text{reelle orthogonale Matrix}$$

$$\Rightarrow \det(R) = \pm 1$$

(iv) Verschiebung des Zeitnullpunktes und ggf. Zeitumkehr

$$t' = \pm t + t_0$$

hier:

$$\det R = +1 \quad \lambda = +1$$

(3.1)

10 kontinuierliche Parameter

$$R: 3$$

$$\vec{u}: 3$$

$$\vec{a}: 3$$

$$t_0: 1$$

eigentliche orthochrone Galileitransformationen

(*)

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = R \vec{r} + \vec{u} t + \vec{a}$$

$$t \rightarrow t' = t + t_0$$

$$R \in SO(3)$$

$$\det(R) = 1$$

(3.2)

ist eine Gruppe; d.h. Hintereinanderausführung
ist wieder eine Galileitransfo

In allen Inertialsystemen haben die Newtonschen
Bewegungsgleichungen dieselbe Form, wobei
auch die Kraft $\vec{F}$ gemäß (*) transformiert
werden muß

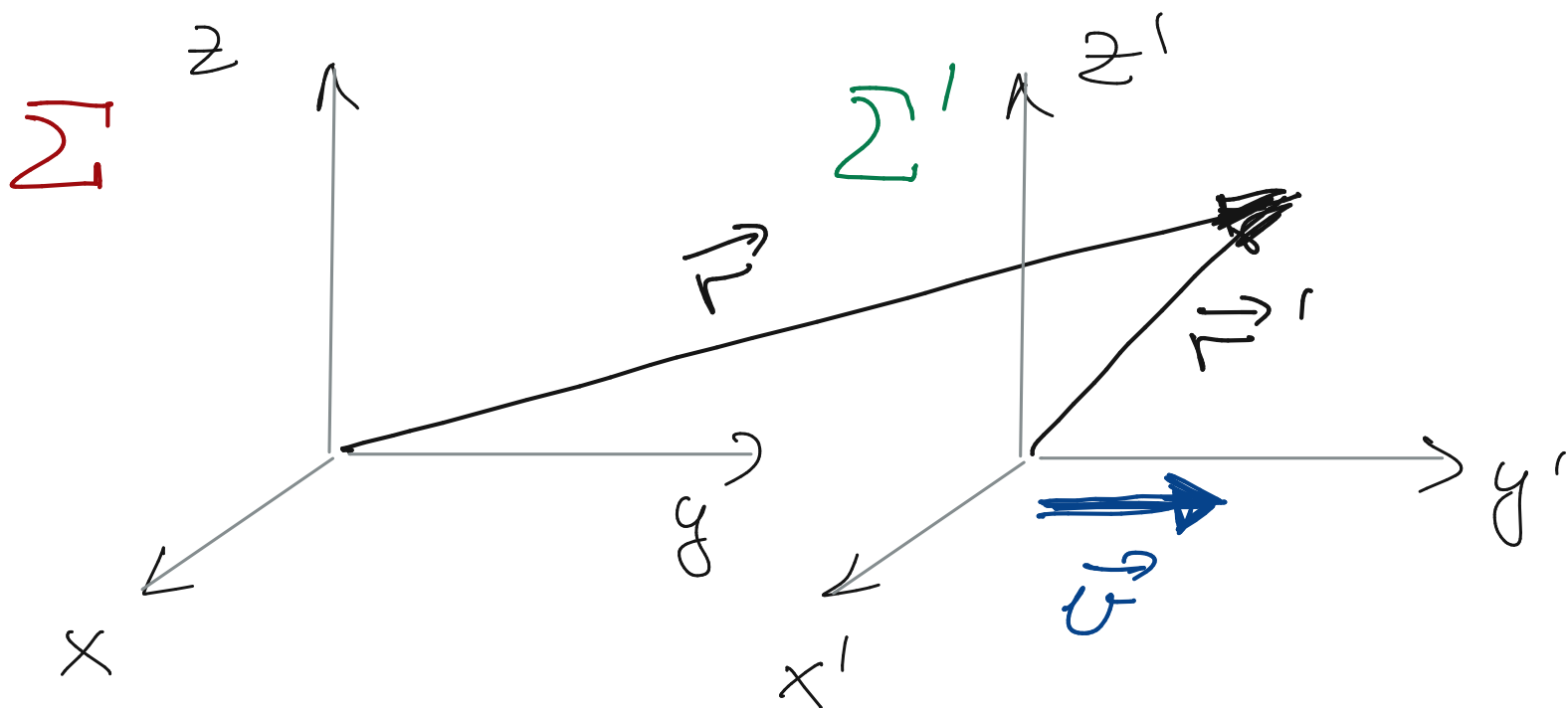
$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \rightarrow \vec{F}'(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t') = R \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Galileisches Relativitätsprinzip

► Wie sieht es mit der Elektrodynamik aus?

Skalare Wellengleichung

$$(3.3) \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{in } \Sigma$$



$$(34) \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad t' = t \quad \text{Galilei}$$

Nun ist (Summenkonvention)

$$(35) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x_{j'}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_{j'}} = \delta_{ij'} \frac{\partial}{\partial x_{j'}} = \frac{\partial}{\partial x_{j'}} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x_{j'}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_{j'}} = \frac{\partial}{\partial t'} - v_j \frac{\partial}{\partial x_{j'}}$$

Mit diesen Transformationen wird aus der Wellengleichung in Σ , Gl. (33):

$$(36) \quad \left[\Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + 2 \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{\nabla}' \frac{\partial}{\partial t'} - \left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{\nabla}' \right) \left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{\nabla}' \right) \right] E = 0$$

nicht invariant $\Downarrow$

Lösung des Problems:

- (a) Maxwellgleichungen sind falsch
→ widerspricht Erfahrung
- (b) Es gibt ein ausgezeichnetes Bezugssystem
→ "Äther"
- (c) Galileitransfo nicht korrekt falls $\frac{|\vec{v}|}{c}$ relevant wird

Experimente zum Äther:

Michelson, Morley (1887, 1897)

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum unabhängig vom Bewegungszustand des Inertialsystems

es bleibt nur noch (c)

- I Alle Naturphänomene laufen in allen Inertialsystemen gleich ab
- II Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist konstant und in allen Inertialsystemen gleich

Postulate der SRT

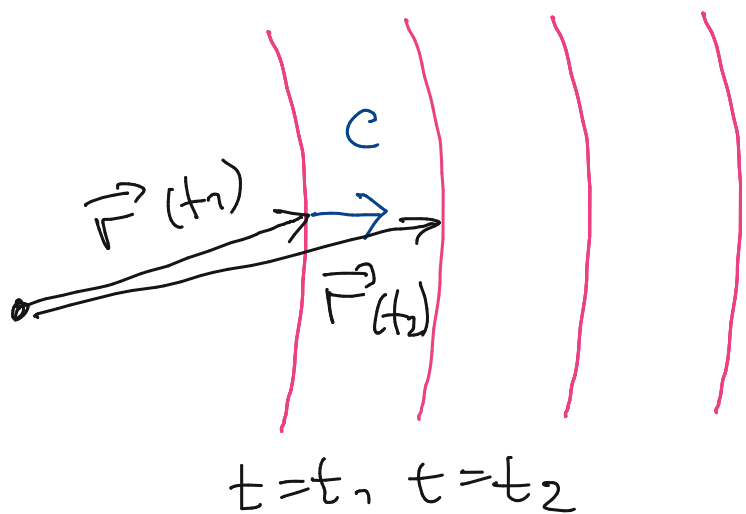
• Wie müssen wir die Galileitransformationen modifizieren?
Forderungen:

(i) linear

(317) (ii) $L(\vec{v}) = L^{-1}(-\vec{v})$

(iii) $|\frac{v}{c}| \ll 1 \rightarrow \text{Galileitransfo}$

Bewegung einer Wellenfront im Vakuum



$$c^2 t^2 - |\vec{r}|^2 = 0 \quad (318)$$

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

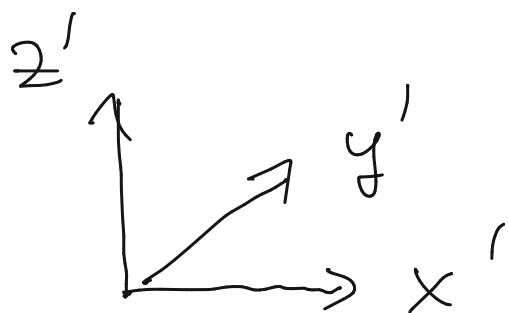
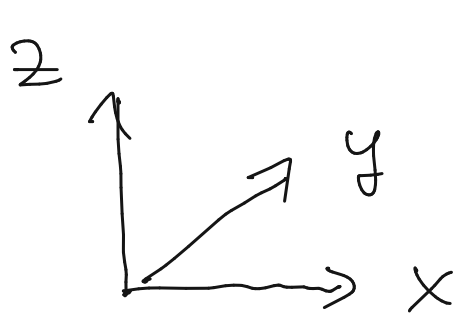
$$c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$$

2. Postulat

Def:

$$x^0 \equiv ct \quad x^1 \equiv x \quad x^2 \equiv y \quad x^3 \equiv z$$

(319)



$$\vec{v} = v \vec{e}_x = v \vec{e}_{x'}$$

$$\text{d.h.} \quad (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2$$

$$(320) \quad x^{2'} = x^2 \quad x^{3'} = x^3$$

Bedingung (i)

$$(321) \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Lambda^{\mu'}_{\nu}(\vec{v}) \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Beding (ii)

$$(322) \quad \underline{\underline{\Lambda(-\vec{v})}} = \underline{\underline{\Lambda^{-1}(\vec{v})}}$$

mit (321), (322) und (iii)

Lorentztransformation $\vec{v} = v \vec{e}_x = v \vec{e}_{x'}$

$$(323) \quad \begin{aligned} x^{0'} &= \gamma x^0 - \gamma \beta x^1 \\ x^{1'} &= -\gamma \beta x^0 + \gamma x^1 \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned}$$

$$(324) \quad \beta = \frac{v}{c} = |\vec{\beta}| \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

inverse Lorentztrafo

(325)

$$\begin{aligned}x^0 &= \gamma x^{0'} + \gamma \beta x^{1'} \\x^1 &= \gamma \beta x^{0'} + \gamma x^{1'} \\x^2 &= x^{2'} \quad x^3 = x^{3'}\end{aligned}$$

für $|\frac{v}{c}| \ll 1 \quad \gamma \rightarrow 1$

$$t' \simeq t$$

$$x^{1'} = x^1 - vt$$

Galilei ✓

Schlussfolgerung

- Raum- und Zeitkoordinaten werden gemischt

$$3+1 \text{ dim} \longrightarrow 4 \text{ dim}$$

- Lorentztrafo entspricht einer Pseudodrehung

(326)

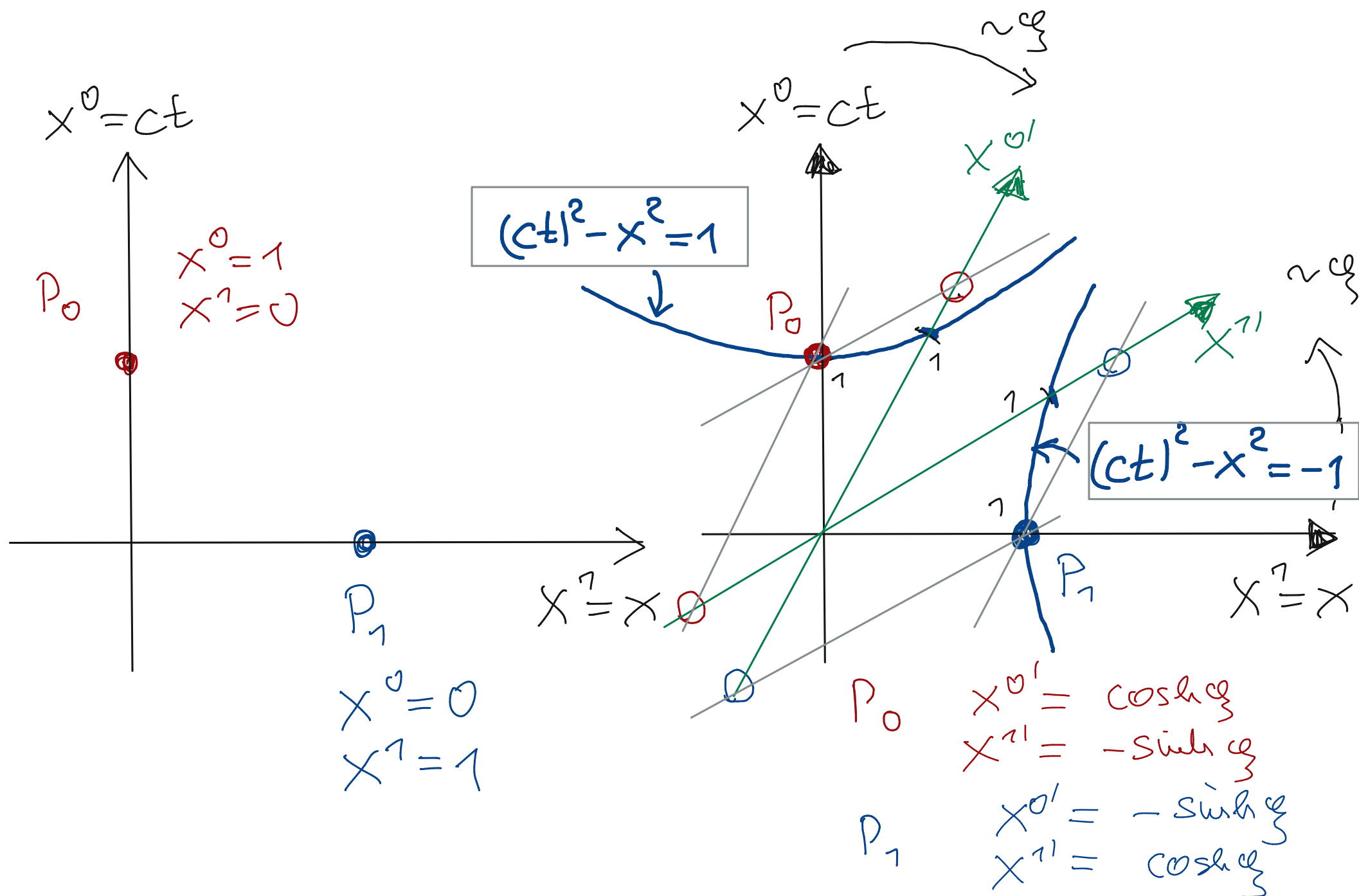
$$\gamma \equiv \cosh \varphi$$

$$\beta \gamma \equiv \sinh \varphi$$

$$\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 = \cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi$$

$$(327) \quad \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$$\det(L^M_r) = \cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$$



→ Darstellung mit schiefwinkligen Koordinaten plus Renormierung der Einheitslängen

IV.2 Minkowskiraum

4-dim Raum Koordinaten (x^0, x^1, x^2, x^3)

(A) ko- und kontravariante Komponenten
eines Vektors; metrischer Tensor

Vektor in $\mathbb{R}^n$; Basisdarstellung

$$(328) \quad \underline{a} = \sum_{j=1}^n a^j \underline{e}_j$$

Skalarprodukt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = c$$

Skalarprodukt der Basisvektoren $\underline{e}_j$

$$(329) \quad \underline{e}_j \cdot \underline{e}_k = g_{jk} = g_{kj}$$

metrischer Tensor

orthogonale Basis

$$(330) \quad \underline{e}_j \cdot \underline{e}_k = \delta_{jk} \quad g_{jk} = \delta_{jk}$$

Schiefwinklige Basis

$$g_{ij} \neq \delta_{jk}$$

$$(331) \quad \underline{e}_j \cdot \underline{e}_k \neq 0 \quad \text{für } j \neq k$$

Aber zu jeder Basis $\{\underline{e}_j\}$ kann man eine zweite Basis $\{\underline{e}^j\}$ konstruieren mit

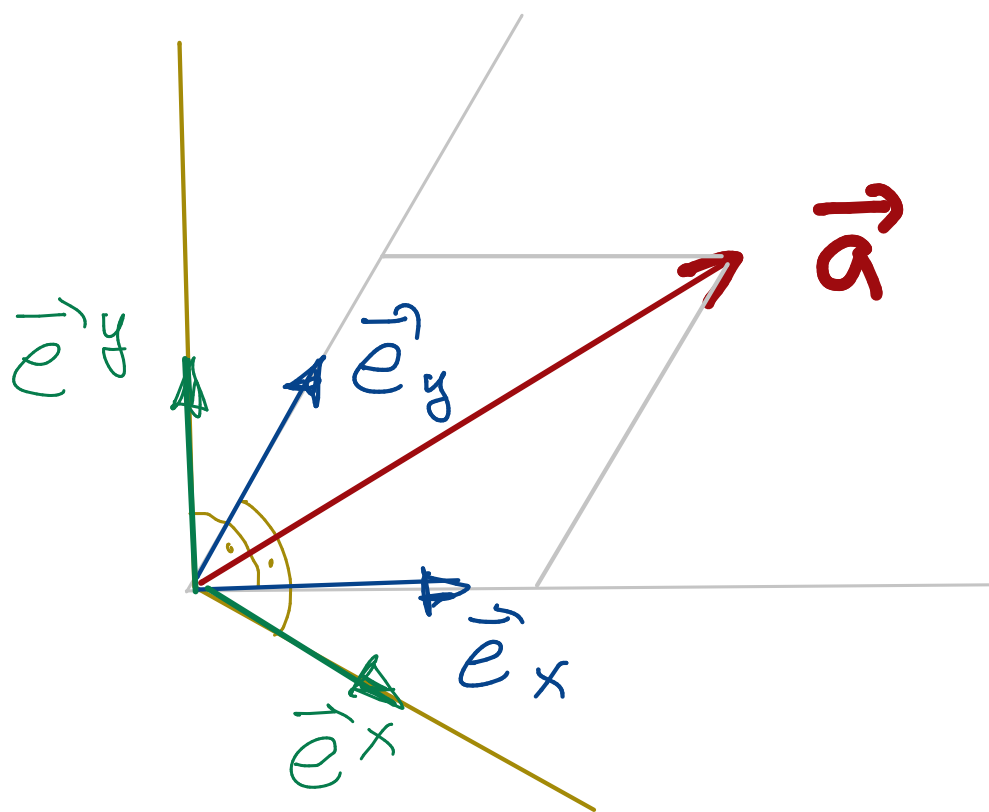
(332)

$$\underline{e}_j \cdot \underline{e}^l = \delta_{je}$$

kovariante
Basis

kontravariante
Basis

Beispiel $\mathbb{R}^2$



offensichtlich

$$\vec{e}^y \cdot \vec{e}_x = 0$$

$$\vec{e}^x \cdot \vec{e}_y = 0$$

(333) $\Rightarrow$ gilt

$$\underline{e}_j = \sum_{k=1}^n g_{jk} \underline{e}^k$$

(334)

$$\underline{q} = \sum_{j=1}^n a^j \underline{e}_j = \sum_{j=1}^n a_j \underline{e}^j$$

kontravariante
Komponenten

kovariante
Komponenten

modifizierte Summenkonvention: über Paare von ko- und kontravarianten Indizes wird summiert

► Beziehung zwischen ko- und kontravarianten Komponenten

$$\begin{aligned} a^j &= \underline{q} \cdot \underline{e}^j = \underline{q} \cdot g^{jk} \underline{e}_k = g^{jk} \underline{q} \cdot \underline{e}_k \\ &= g^{jk} a_k \end{aligned}$$

(335)

$$a^j = g^{jk} a_k$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \delta_{je} &= \underline{e}^j \cdot \underline{e}_e = g^{jm} g_{ek} \underbrace{\underline{e}_m \cdot \underline{e}_k}_{\delta_{mk}} \\ &= g^{jm} g_{em} = g^{jm} g_{me} \end{aligned}$$

(336)

$$g^{jm} g_{me} = \delta_{je}$$

← 13.07.

(B) Abstandsmaß im Minkowski-Raum, raumartige, zeitartige, lichtartige Abstände

2. Postulat der SRT

$$(337) \quad (ds)^2 = (cdt)^2 - (d\vec{r})^2 \\ = (dx^0)^2 - [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]$$

ist Invariante (Tensor 0' Stufe)

(337) kann als Skalarprodukt aus dx^μ $\mu=0,1,2,3$ geschrieben werden

$$(338) \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

nicht
positiv
definit

mit metrischem Tensor

(339)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kontravariante Komponenten des 4-Ortsvektors

$$(340) \quad x^0, x^1, x^2, x^3 = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$$

kovariante Komponenten des 4-Ortsvektors

$$(341) \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -\vec{r})$$

Def: Zwei Punkte im Minkowski-Raum haben einen

lichtartigen Abstand

$$(342) \quad \Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = 0$$

zeitartigen Abstand

$$(343) \quad \Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) > 0$$

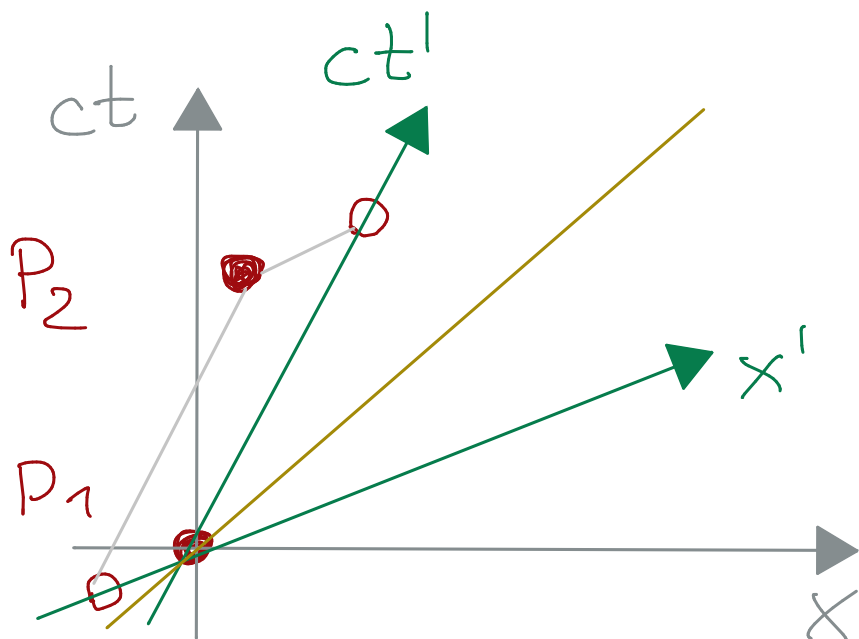
raumartigen Abstand

$$(344) \quad \Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) < 0$$

Punkte mit lichtartigem, raumartigem oder zeitartigem Abstand verhalten sich verschieden wenn sie aus verschiedenen Inertialsystemen betrachtet werden!

$$\Delta S^2 > 0$$

zeitartiger Abstand

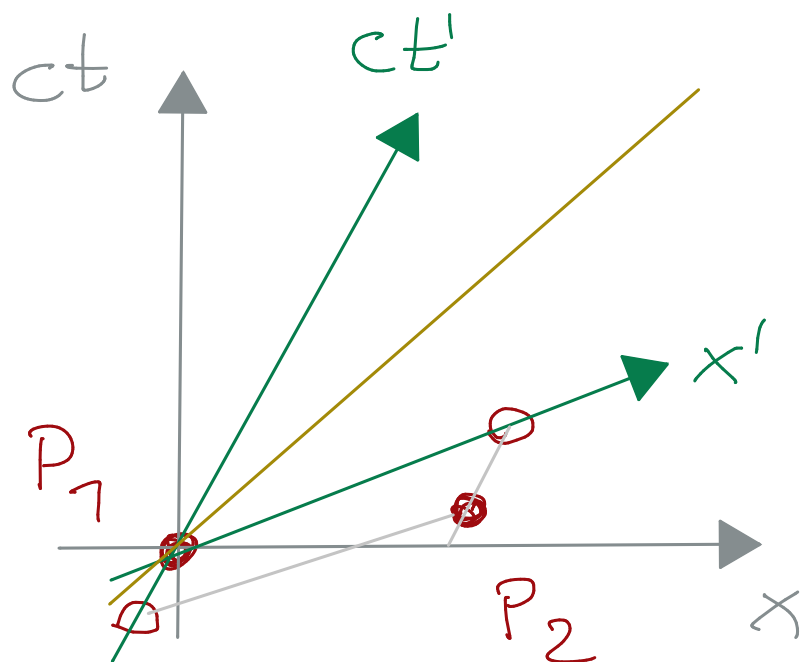


P_2 ist in jedem Inertialsystem zeitlich nach P_1

räumliche Reihenfolge hängt vom Bezugssystem ab!

$$\Delta S^2 < 0$$

raumartiger Abstand

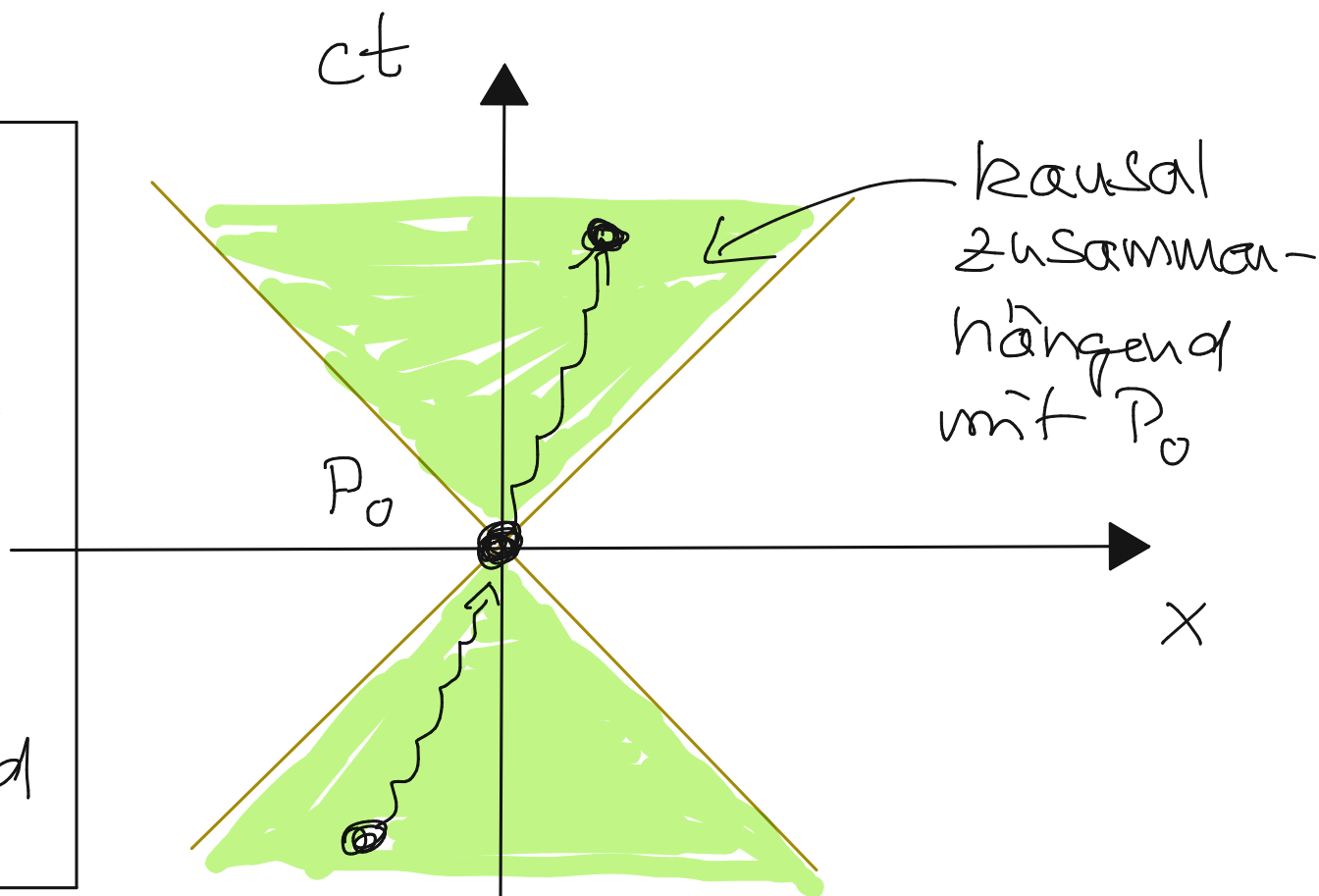


P_2 ist in jedem Inertialsystem räumlich nach P_1

zeitliche Reihenfolge hängt vom Bezugssystem ab!

Kausalität erfordert absolute zeitliche Reihenfolge von Ursache und Wirkung

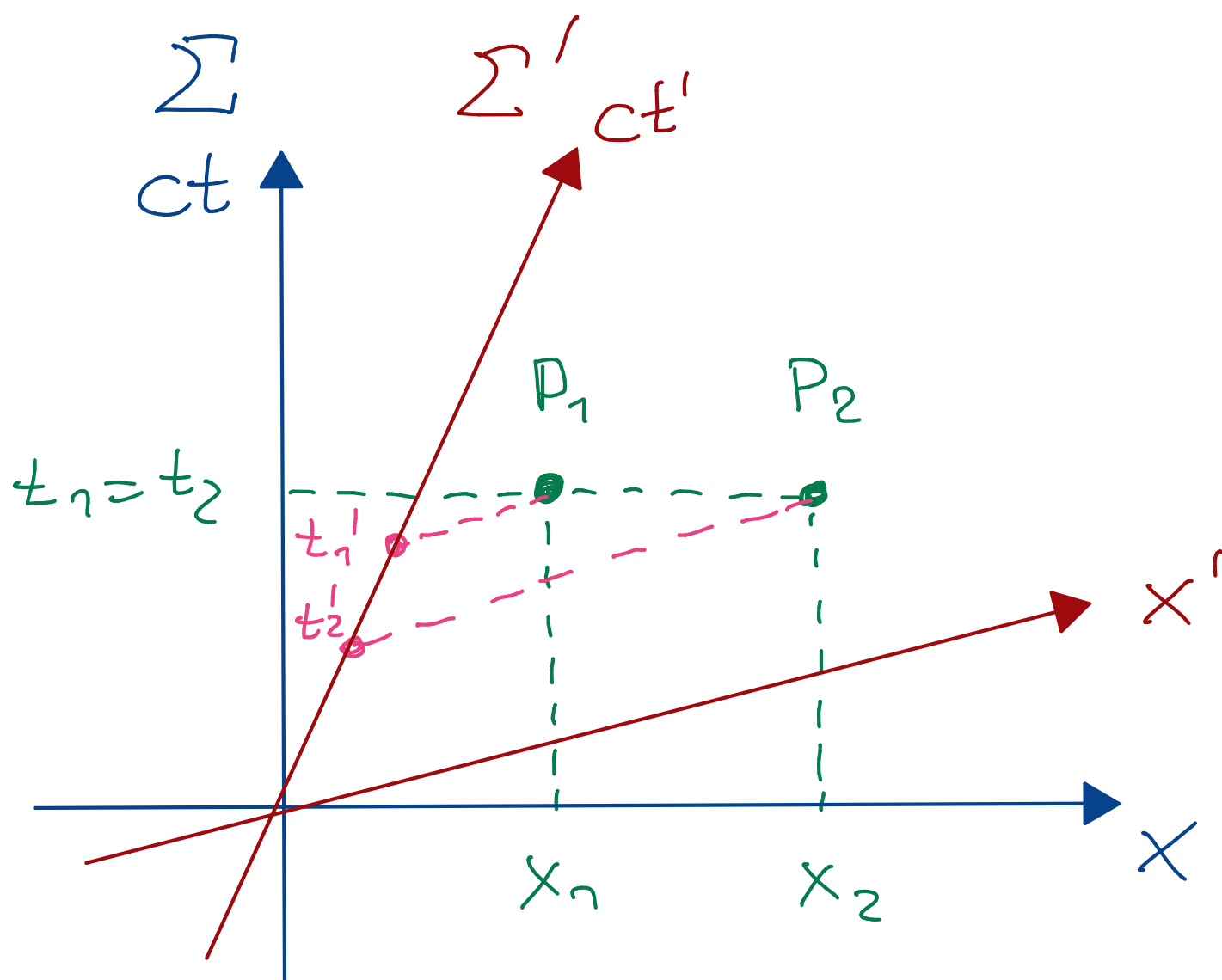
$\Rightarrow$ zeitartiger Abstand



IV.3 kinematische Konsequenzen der SRT

(A) Relativität der Gleichzeitigkeit

In der nichtrelativistischen Physik hat die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an unterschiedlichen Orten eine absolute, vom Bezugssystem unabhängige Bedeutung. Dies ist in der SRT nicht mehr der Fall.



Die Gleichzeitigkeit zweier räumlich getrennte Ereignisse hängt vom Inertialsystem ab.

$$\Sigma \quad t = t_1 = t_2 \quad x_2 \neq x_1$$

$$\Sigma' \quad ct_1' = \gamma ct_1 + \gamma \beta x_1$$

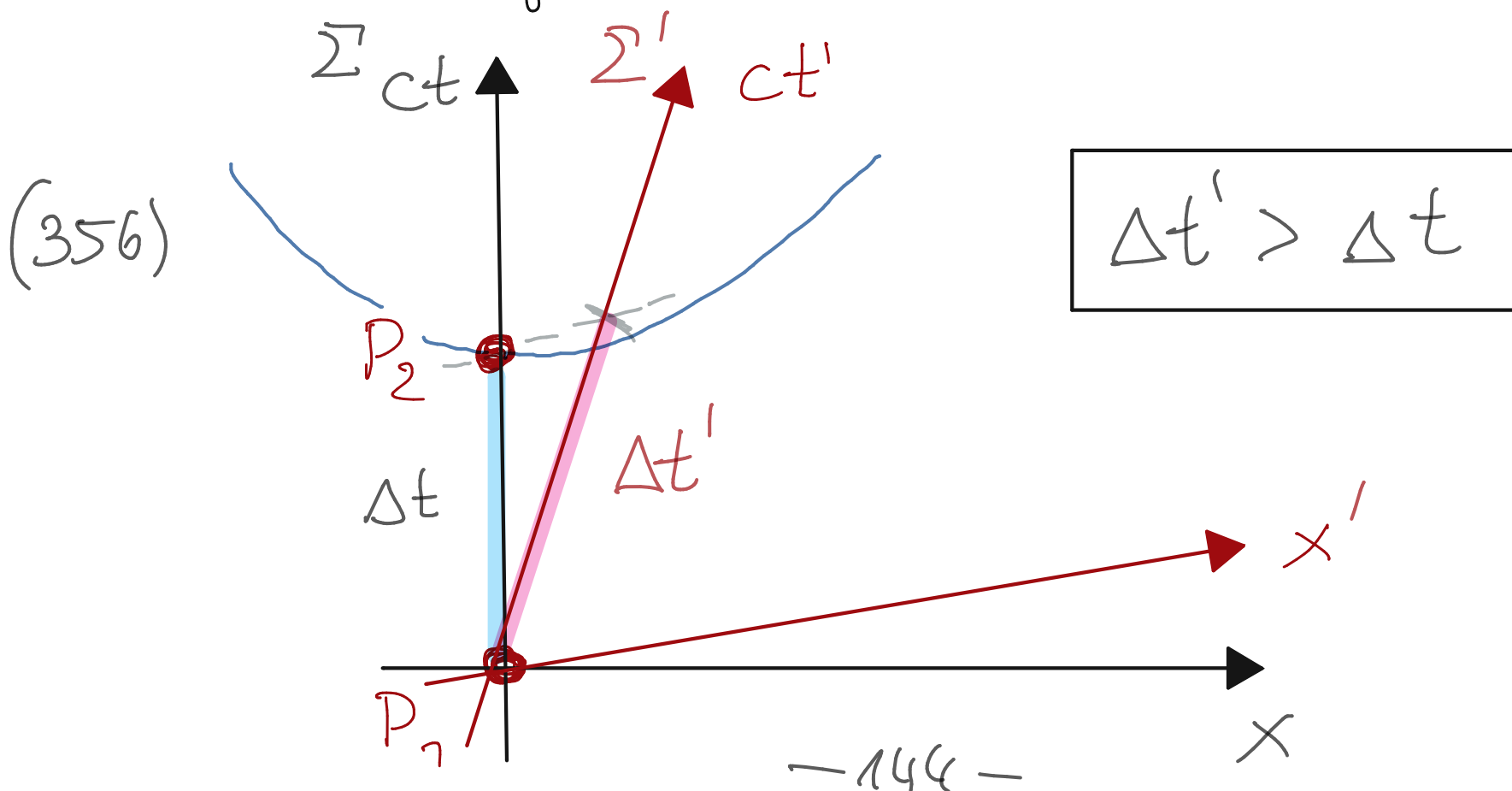
$$ct_2' = \gamma ct_2 + \gamma \beta x_2$$

$$(355) \quad c(t_1' - t_2') = \gamma c \underbrace{(t_1 - t_2)}_{=0} + \gamma \beta \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\neq 0}$$

Die Relativität der Gleichzeitigkeit hat eine Reihe von kinematischen Konsequenzen

(B) Zeitdilatation und Zwillingsparadoxon

Die Länge eines Zeitintervalls sei durch eine im Inertialsystem Σ ruhende Uhr definiert



Σ

$$P_1: X_0^{(1)} = 0 \quad X_1^{(1)} = 0$$

$$P_2: X_0^{(2)} = c \Delta t \quad X_1^{(2)} = 0$$

 Σ'

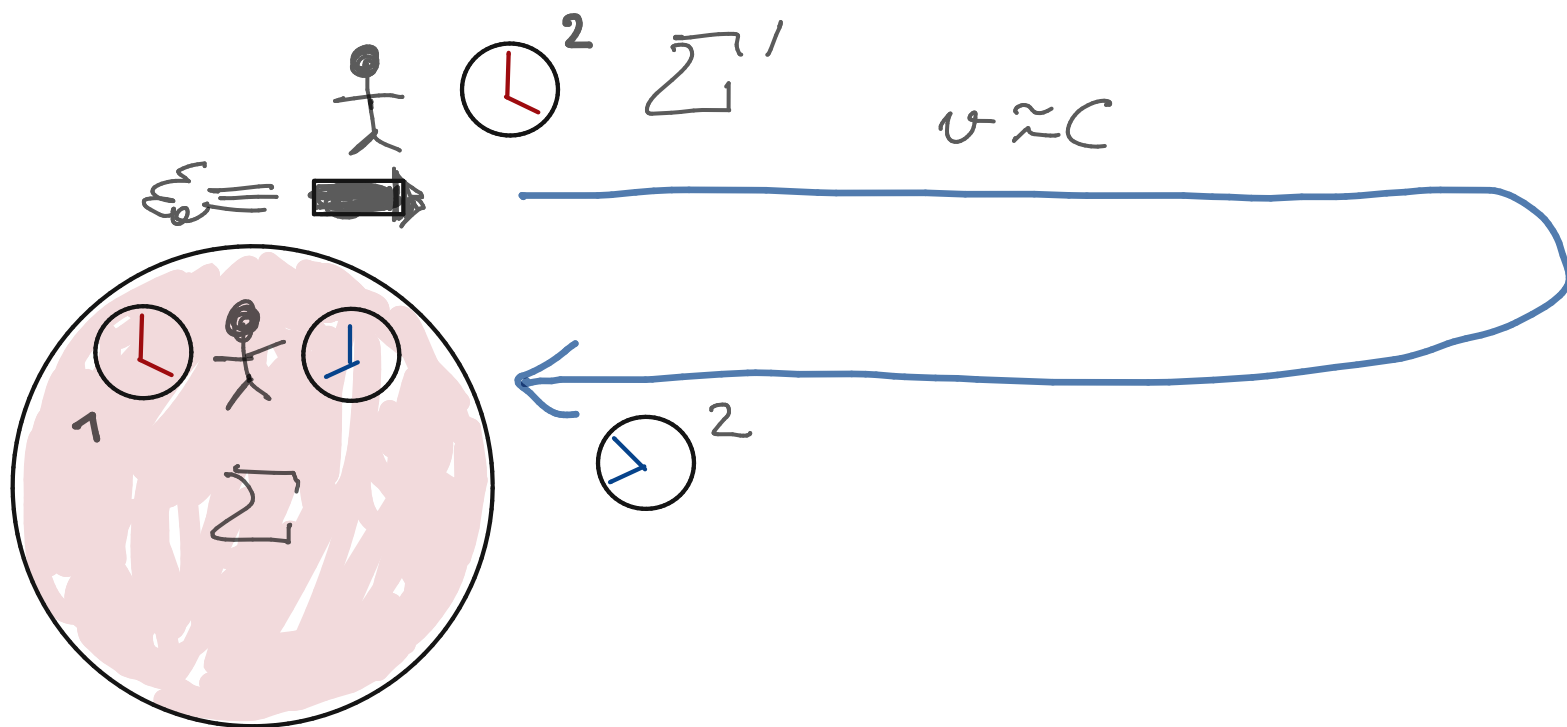
$$P_1: X_0' = \gamma X_0 + \gamma \beta X_1 = 0$$

$$P_2: X_0' = \gamma X_0 + \gamma \beta X_1 = \gamma c \Delta t$$

(337)

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

Zwillingparadoxon



Ein Zwilling eines Paares geht auf Reise mit einer Rakete deren Geschwindigkeit nahe der Lichtgeschwindigkeit ist. Beim Start synchronisieren die Geschwister ihre Uhren.

➤ Aus dem System Σ' der Rakete betrachtet läuft die Uhr in Σ langsamer. Aus dem System Σ der

Erde läuft aber die Uhr im System Σ' der Rakete langsamer. Dies ist solange kein Problem wie sich die Zwillinge an verschiedenen Orten befinden. Aber was zeigen ihre Uhren an, wenn Sie nach langer Reise der einen Zwilling wieder aufeinander treffen?

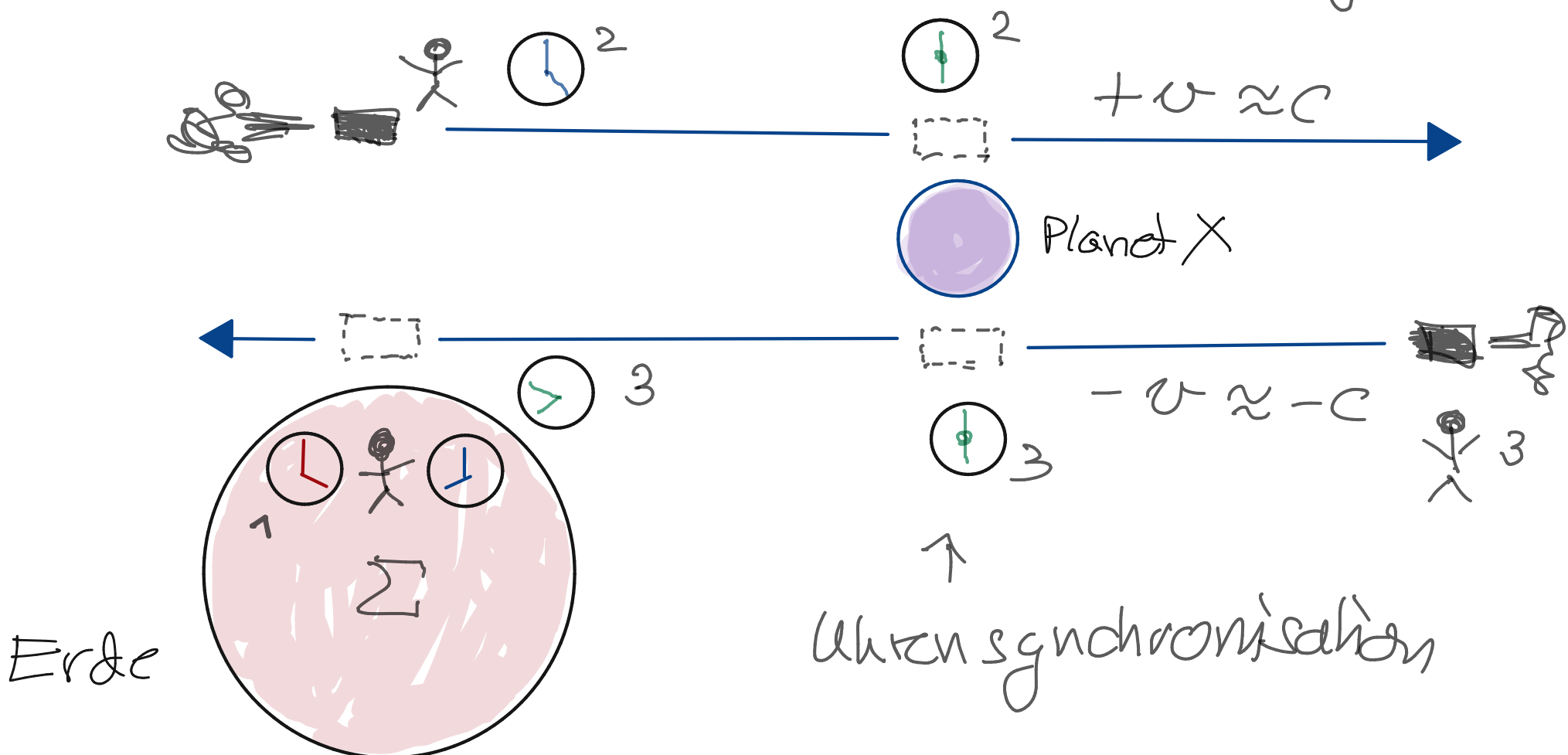
Antwort: die Uhr des Reisenden ist langsamer gelaufen!

Paradoxon: woher die Asymmetrie?

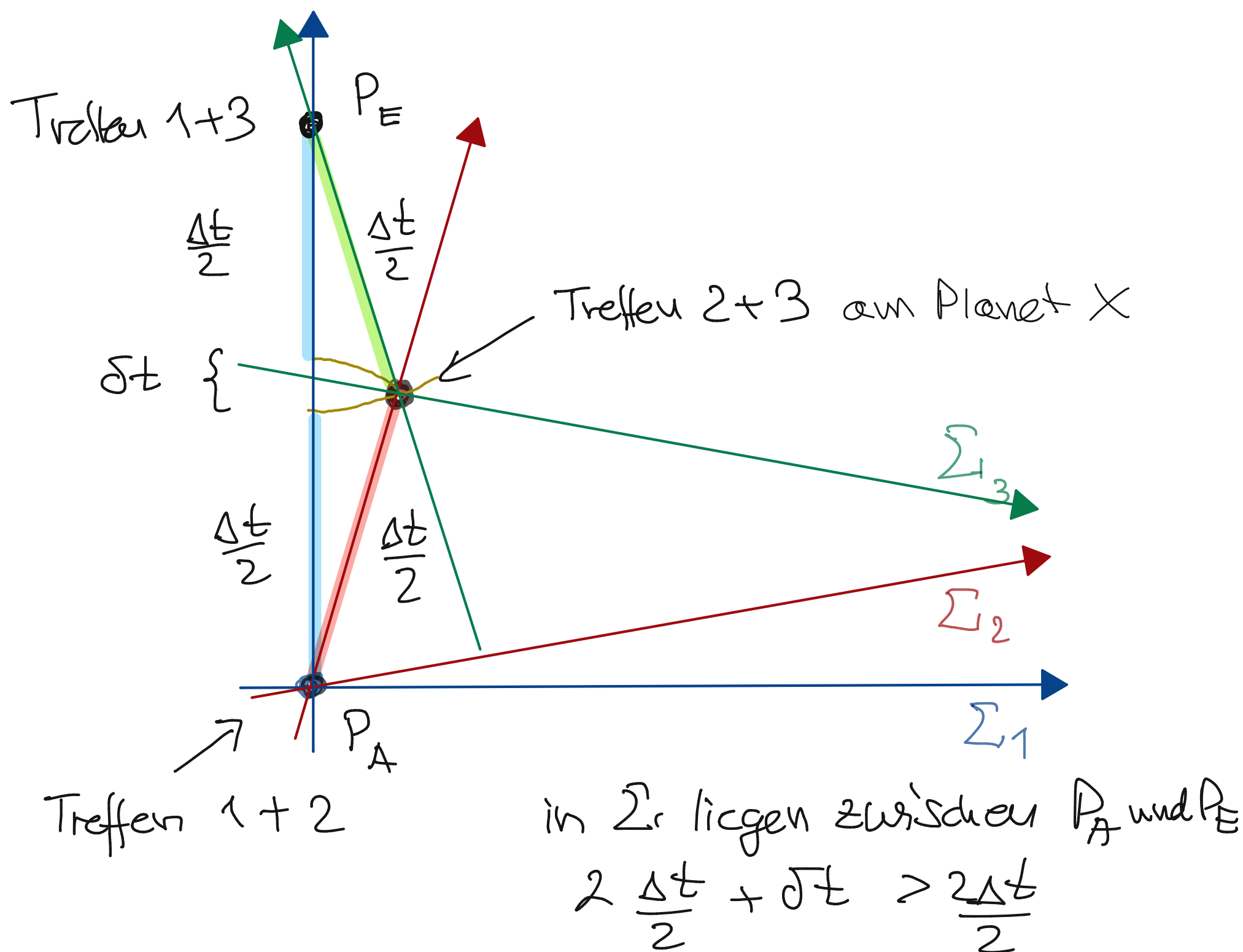
eine Antwort: Der Reisende musste eine beschleunigte Bewegung ausführen und entscheidet sich daher von seinem Zwilling

Das ist eine schlechte Erklärung!

betrachten alternatives Szenario mit Drillingen



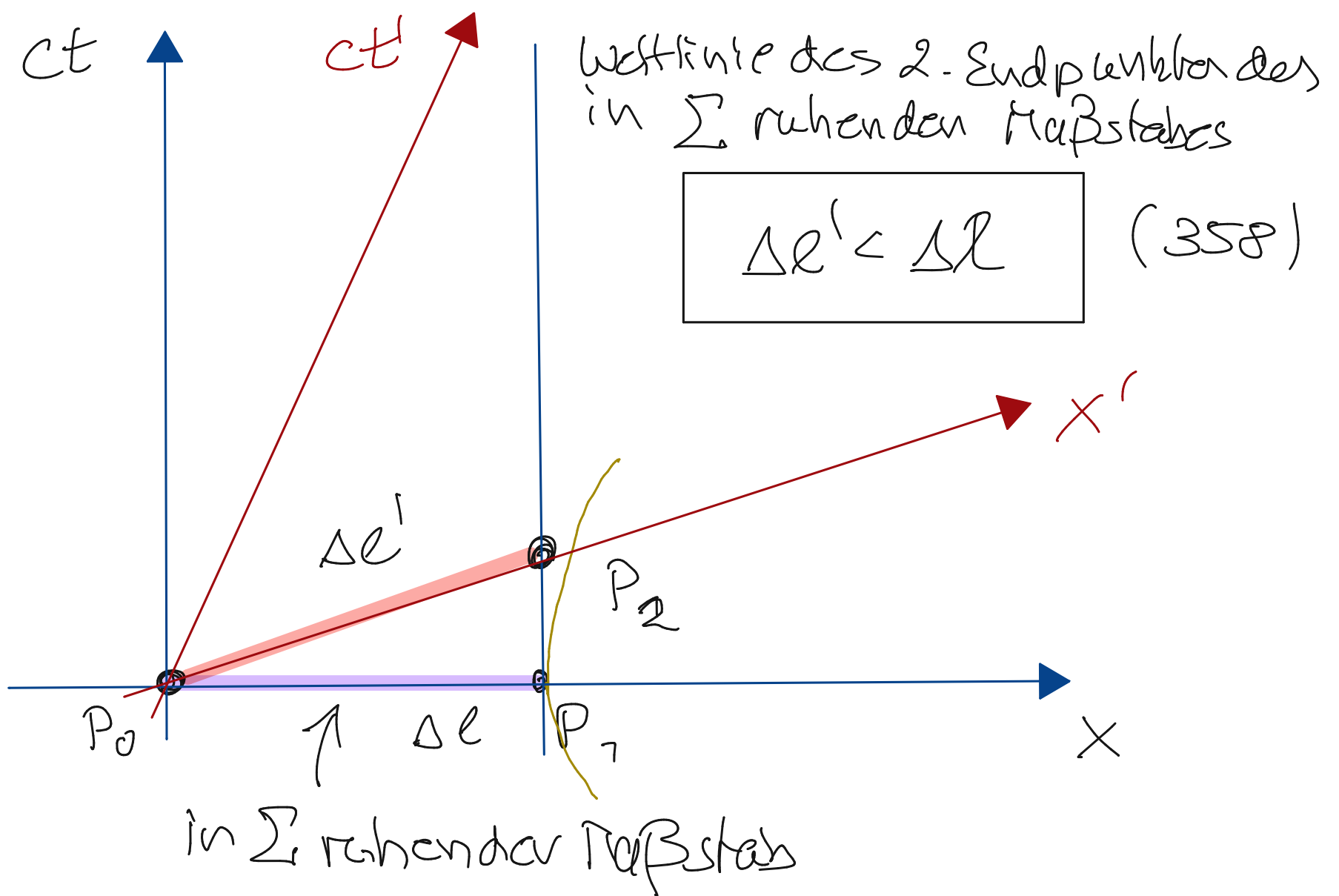
Wenn 2 an 1 vorbeifliegt synchronisieren Sie ihre Uhren. Wenn 2 auf 3 trifft was gerade beim Vorbeiflug beim Planeten X passiert, dann die Uhren ebenfalls. Wenn 3 schließlich an 1 vorbeifliegt vergleichen Sie die Uhren. Auf dem bewegten Pfad 2+3 ist die Zeit langsamer abgelaufen als auf der Erde (1). Hier ist keine Beschleunigung erforderlich !



Erklärung: Das Auftreffen beider Raketen am Planeten X ist aus dem Inertialsystem der Erde nicht gleichzeitig!

(C) Längenkontraktion

Die Länge einer Strecke in einem Bezugssystem Σ wird durch einen in diesem Bezugssystem ruhenden Maßstab definiert.



$$P_0: \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0 \quad \quad x'_0 = 0, \quad x'_1 = 0$$

$$P_1: \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta l$$

$$P_2: \quad X_0' = 0 \quad X_1' = ?$$

Enden werden zur selben Zeit gemessen

$$(359) \quad 0 \stackrel{!}{=} X_0'(P_2) = \gamma X_0(P_2) + \gamma \beta X_1(P_2)$$

$$(360) \quad X_1'(P_2) = \gamma \beta X_0(P_2) + \gamma \overset{\parallel}{\Delta \ell} X_1(P_2)$$

aus (359) $\Rightarrow$

$$(361) \quad X_0(P_2) = -\beta \Delta \ell$$

$\Rightarrow$

$$X_1'(P_2) = -\gamma \beta^2 \Delta \ell + \gamma \Delta \ell$$

$$(362) \quad \begin{aligned} &= \gamma (1 - \beta^2) \Delta \ell = \gamma \frac{1}{\gamma^2} \Delta \ell \\ &= \frac{1}{\gamma} \Delta \ell \end{aligned}$$

$$(363) \quad \Delta \ell' = X_1'(P_2) - X_1'(P_0) = \frac{1}{\gamma} \Delta \ell$$

Längenkontraktion

Bem: Die Dimensionen senkrecht zur Bewegungsrichtung sind nicht beeinflusst

IV. 4 Grundgesetze der relativistischen Mechanik

Wie müssen die Newtonschen Gesetze modifiziert werden, damit sie relativistisch invariant sind, d.h. in jedem mittels Lorentztransformationen auseinander hervorgehenden Inertialsystem dieselbe Form haben?

(A) Geometrische Objekte und Tensoren

- Koordinatentransformation

$$\begin{array}{ccc} \vec{e}_j & \longrightarrow & \vec{e}'_j \\ \boxed{\Sigma} & & \boxed{\Sigma'} \end{array}$$

Basisvektoren
in n -dim. Raum

Koordinaten

$$x^{j'} = x^{j'}(x^i)$$

$$dx^{j'} = A^{j'}_i dx^i$$

(364)

$$A^{j'}_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}$$

Transformationsmatrix

Damit die Transformation umkehrbar eindeutig ist muß gelten

$$\det(A^{\bar{j}'}_{\bar{i}}) \neq 0$$

Kettenregel

$$\sum_i \frac{\partial x^{\bar{j}'}}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^{k'}} = A^{\bar{j}'}_{\bar{i}} A^{\bar{i}}_{k'} = \delta_{j'k'}$$

$$\Rightarrow \det(A^{\bar{j}'}_{\bar{i}}) \det(A^{\bar{i}}_{k'}) = 1$$

(365)

(i) spezielle orthogonale Transformation $SO(n)$
(Drehung)

(366)

$$\det(A^{\bar{j}'}_{\bar{i}}) = +1$$

(ii) Inversion

(367)

$$\det(A^{\bar{j}'}_{\bar{i}}) = -1$$

Def: Ein geometrisches Objekt

$$T^{k_1 \dots m_r}_{i_1 j_1 \dots k_r} \dots (x^n)$$

heißt Tensor wenn es sich bei Koordinaten
Transformationen (337) transformiert wie

$$T^{k'_1 e'_1 m'_1 \dots}_{i'_1 j'_1 k'_1 \dots} (x^{n'}) = A^{i_1}_{i'_1} A^{j_1}_{j'_1} \dots A^{k_1}_{k'_1} A^{e_1}_{e'_1} \dots \\ \dots T^{k_1 \dots m_r}_{i_1 j_1 \dots k_r} \dots (x^n)$$

Die Stufe des Tensors ist durch die Zahl der Indizes
gegeben

• Tensor 0 Stufe

Invariante

$$(368) \quad T'(x^{n'}) = T(x^n)$$

• Tensor 1 Stufe

"Vektor"

$$(369) \quad T_{j'_1} (x^{n'}) = A^{j_1}_{j'_1} T_{j_1} (x^n)$$

etc.

(B) Physikalische Gesetze als Tensor- relationen im Minkowski-Raum

physikalische Größen sind Tensoren im
Minkowski-Raum

z.B. Vektor $A \equiv (A^0, A^1, A^2, A^3)$
(370)

4-Vektor

Skalarprodukt

$$(377) \quad A \cdot B = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu B^\mu$$

A^μ ist Lorentztensor falls bei Koordinatentransf. gilt

$$A^{\mu'} = L^{\mu'}_{\nu} A^\nu$$

Ein physikalisches Gesetz daß durch Lorentz
tensoren derselben Stufe (auf beiden Seiten
der Gleichung) ausgedrückt werden kann
hat dieselbe Form in allen Inertialsystemen

man bezeichnet dies als Kovarianz

Skalarprodukt $A^\mu B_\mu = \lambda$ ist eine Invariante

(C) Bahnkurven und Eigenzeit

Eine unübersichtliche Eigenschaft der SRT ist die Tatsache, daß ein und dasselbe physikalische Bewegungsvorgang in unterschiedlichen Inertialsystemen betrachtet unterschiedlich schnell abläuft.

Um sich von dieser Komplikation zu lösen ist es sinnvoll sich bewegenden Massenpunkten eine eigene Uhr mitzugeben

Eigenzeit τ

$d\tau$: Zeitintervall gemessen im mitbewegten instantanem Inertialsystem

4-Orbvektor

(372)

$$X = (x^0, \vec{x})$$

im instantanen Ruhesystem des Teilchens

$$(373) \quad dx = (dx^0, 0) = (cd\tau, 0)$$

(374)

$$ds^2 = dx \cdot dx = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$$

ist Invariante und daher in jedem Inertialsystem gleich

(375)

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 / c^2} dt = \sqrt{1 - \beta^2} dt = \frac{1}{\gamma} dt$$

4-Geschwindigkeit

(376)

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv \left(\frac{d}{d\tau} x^0, \frac{d}{d\tau} \vec{x} \right)$$

(C) Relativistisches Kraftgesetz

Damit das Bewegungsgesetz eines Massenpunktes forminvariant unter allen (eigentlichen) Lorentztransformationen ist, muß es als Relation zwischen 4-Vektoren formuliert werden

$$(377) \quad m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = m \left(\frac{d^2 x^0}{d\tau^2}, \frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} \right) = (F_0, \vec{F})$$

im Ruhesystem des MP : $\frac{dx^0}{d\tau} = c \quad \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0$

4-Kraft im Ruhesystem des MP

(378)

$$F^\mu|_R = (0, \vec{F}_R)$$

4-Kraft in beliebigem Inertialsystem

$$(379) \quad F_R^\mu \xrightleftharpoons[\mathcal{L}(-\vec{v})]{\mathcal{L}(\vec{v})} \bar{F}^\mu = (\bar{F}_0, \vec{\bar{F}})$$

(380)

$$\vec{\bar{F}} = \vec{F}_R + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{F}_R) \vec{v}$$

$$\bar{F}_0 = \frac{\gamma}{c} (\vec{v} \cdot \vec{F}_R) = \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\bar{F}})$$

4-Impuls

(381)

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

4-Vektor
d.h. abhängig
von Inertial-
System

Im Ruhesystem

$$(382) \quad p^\mu|_R = (mc, 0)$$

Im beliebigem Inertialsystem

(383)

$$p^\mu = (\gamma mc, \gamma m \vec{v})$$

Die nullte Komponente von p^μ hat die Dimension
Energie durch Lichtgeschwindigkeit

D.h. wir setzen

(384)

$$p^\mu = \left(\frac{1}{c} E, \vec{p} \right)$$

$$p_\mu = \left(\frac{1}{c} E, -\vec{p} \right)$$

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

4-Impuls

Interpretation von $\vec{p}$: geschwindigkeitsabhängige Masse

(385)

$$\vec{p} = m(v) \vec{v}$$

$$m(v) = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Es folgt ein Lorentzskalar (Invariant)

$$p^\mu p_\mu = \frac{1}{c^2} E^2 - |\vec{p}|^2 \stackrel{!}{=} p^\mu p_\mu \Big|_{\text{Ruhe}} = m^2 c^2$$

$\Rightarrow$ Energie-Impulsrelation eines relativistischen Massenpunktes

(386)

$$E = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Ruheenergie ($\vec{p} = 0$)

(387)

$$E_0 = m c^2$$

kinetische Energie

$$T = E - mc^2 \approx \frac{p^2}{2m} \left(1 - \frac{p^2}{4m^2c^2} \right)$$

$$T \approx \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2}$$

d.h.

$$(388) \quad E \approx \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\substack{\text{nichtrel.} \\ \text{kin. Energie}}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{p}{mc} \right)^2 \right)}_{\text{relativist. Korrektur}}$$

(D) Lagrangefunktion eines relativistischen Teilchens

Das Hamiltonsche Prinzip

$$(389) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \, L = 0$$

enthält explizit die Zeit und ist somit nicht Lorentzinvariant!

$$(390) \quad \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, \tilde{L}(x^\mu, p^\mu, \tau) = 0$$

$\tilde{L}$ sollte Lorentzskalar sein, freies Teilchen

(391)

$$\tilde{L} = \tilde{L}(p^\mu) = -c \sqrt{p^\mu p_\mu} = -mc^2$$

sonit
(392)

$$L = -mc^2 \frac{d\tau}{dt} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens im
elm. Feld

(393)

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\Phi + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}$$

nicht in der Vorlesung behandelt:

- Hamilton Jacobi Theorie
- Mechanik wechselwirkender Vielteilchensysteme ($N > 2$) und chaos
- Mechanik deformierbarer Körper