

III.5 Kanonische Transfor- mationen

(A) Forminvarianz der Lagrangegleich- ungen bei Punkttransformationen

Def: Eine Transformation (Koordinaten $\leftrightarrow$ Koordinaten)
(276) $\{q_1, \dots, q_s\} \longrightarrow \{Q_1, \dots, Q_s\}$

heißt Punkttransformation wenn

$$Q_u = Q_u(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

$$q_e = q_e(Q_1, Q_2, \dots, Q_s; t)$$

differenzierbare Funktionen sind

Satz: Bei einer Punkttransformation bleiben die
Lagrangegleichungen invariant

$$L(q, \dot{q}, t) \longrightarrow \tilde{L}(Q, \dot{Q}, t)$$

$$\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(\underline{q}(\underline{Q}, t), \underline{\dot{q}}(\underline{Q}, \dot{Q}, t); t)$$

Beweis: es gilt $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$ (277)

$$\dot{q}_n = \sum_e \frac{\partial q_n}{\partial Q_e} \dot{Q}_e + \frac{\partial q_n}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{Q}_e} = \frac{\partial q_n}{\partial Q_e}$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_e} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_e} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_e} \right)$$

and $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_e} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_e} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_e} \right)$

! ||
0

||
 $\frac{\partial q_j}{\partial Q_e}$

$$= \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_e}$$

d.h. $\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_e} = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial Q_e} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_e} \right]$

= $\sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_e} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_e} \right] = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_e}$

Euler (277)
Lagrange

□

(B) Phasenraumtransformationen und kanonische Transformationen

Def: Eine Transformation

$$(278) \quad (\underline{q}, \underline{p}) \longleftrightarrow (\underline{Q}, \underline{P})$$

heißt Phasenraumtransformation oder Phasentransfo wenn

$$Q_k = Q_k(\underline{q}, \underline{p}, t) \quad P_k = P_k(\underline{q}, \underline{p}, t)$$

und deren Umkehrung differenzierbar sind

Frage: Gilt daß wie unter (A) die kanonischen Gleichungen unter Phasenraumtransformationen?

j-A. NEIN !

Def: Eine Phasentransfo heißt kanonische Transformation falls es eine Abbildung

$$H(\underline{q}, \underline{p}, t) \longleftrightarrow \tilde{H}(\underline{Q}, \underline{P}, t)$$

davon, daß

$$(279) \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \quad \dot{P}_k = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k}$$

Sie heißt kanonisch im engeren Sinne, falls darüberhinaus

$$\tilde{H} = H(q_k(Q, P, t), p_k(Q, P, t), t)$$

gilt

Frage: (1) Gibt es solche "kanonischen Transformationen"?

(2) Warum sollten wir uns dafür interessieren?

zu (2): Annahme $\exists$ kanonische Trafo, so daß

$$\tilde{H}(Q, P, t) = \tilde{H}(P, t)$$

$$(280) \quad \text{d.h.} \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \equiv 0 \quad \forall Q_k$$

Dann sind alle Q_k zyklisch und alle

$$(281) \quad \underline{\underline{P_k = \text{konst. } t}} \quad \text{Erhaltungsgrößen}$$

damit $\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k} = \text{konst} = C_k$

und

(282)
$$\underline{Q_k(t) = C_k t + Q_k(0)}$$

vollständige Lösung!

kanonische Transformationen können
 sehr nützlich sein

zu (1) kanonische Trajektorien existieren

Bsp!: $Q_k = -p_k \quad P_k = q_k$

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\underline{Q}, \underline{P}, t) &= H(\underline{q}(\underline{Q}, \underline{P}, t), \underline{p}(\underline{Q}, \underline{P}, t)) \\ &= H(\underline{P}, -\underline{Q}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} &= \frac{\partial H(\underline{P}, -\underline{Q}, t)}{\partial Q_k} = - \frac{\partial H(\underline{q}, \underline{P}, t)}{\partial p_k} \\ &= -\dot{q}_k = -\dot{P}_k \quad \checkmark \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} &= \frac{\partial H(\underline{P}, -\underline{Q}, t)}{\partial P_k} = \frac{\partial H(\underline{q}, \underline{P}, t)}{\partial q_k} = \dot{p}_k \\ &= \dot{Q}_k \quad \checkmark \end{aligned}$$

Anwendung: harmonischer Oszillator

$p \leftrightarrow -q$ bildet das Problem auf sich selbst ab

Wie können kanonische Transformationen generiert werden?

(C) Erzeugende Funktion einer kanonischen Trafo

- Zur Erinnerung: Die kanonischen Gleichungen folgten aus dem verallgemeinerten hamiltonschen Prinzip

$$(283) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - H(q, p, t) \right) = 0$$

D.h. falls $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ kanonisch sein soll, muß

$$(284) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - \tilde{H}(Q, P, t) \right) \stackrel{!}{=} 0$$

Satz $(\underline{q}, \underline{p}) \rightarrow (\underline{Q}, \underline{P}, t)$

$$H(\underline{q}, \underline{p}, t) \rightarrow \tilde{H}(\underline{Q}, \underline{P}, t) \text{ ist kanonisch}$$

(285) falls

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - H(\underline{q}, \underline{p}, t) = \sum_j P_j \dot{Q}_j - \tilde{H}(\underline{Q}, \underline{P}, t) + \frac{dF_1}{dt}$$

wobei (286) $F_1 = F_1(\underline{q}, \underline{Q}, t)$ eine

hinreichend oft diff. bare Funktion der alten und neuen Koordinaten ist. F_1 heißt Erzeugende und legt die Trafo vollständig fest

Bew:

$$(287) \quad dF_1 = \sum_j \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} dQ_j \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

$$\stackrel{\text{mit (285)}}{=} \sum_j (p_j dq_j - P_j dQ_j) + (\tilde{H} - H) dt$$

damit
(288)

$$p_j \equiv \frac{\partial F_1}{\partial q_j}$$

$$P_j \equiv \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \quad (289)$$

und
(290)

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Falls $\det \frac{\partial^2 F}{\partial Q_j \partial q_n} \neq 0$ kann nach $Q_j = Q_j(\underline{q}, \underline{P}, t)$ aufgelöst werden und F_1 legt Trafo vollständig fest?

Da $\delta \underline{P}_j$ und δQ_j unabhängig folgt (294) $\Rightarrow$

$$(291) \quad \dot{Q}_j = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_j} \quad \dot{P}_j = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_j} \quad \square$$

Man kann äquivalente Formulierungen der Erzeugenden Funktion finden durch Legendretransformationen

$$(292) \quad F_1(\underline{q}, \underline{Q}, t) \rightarrow \underline{F_2(\underline{q}, \underline{P}, t)} = F_1 - \sum_{j=1}^s \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} Q_j$$

$$= F_1 + \sum_{j=1}^s P_j Q_j$$

nach (287) und (288)

$$dF_1 = \sum_j (\underline{p}_j dq_j - \underline{P}_j dQ_j) + (\bar{H} - H) dt$$

$$dF_2 = dF_1 + \sum_j (\underline{P}_j dQ_j + d\underline{P}_j Q_j)$$

$$= \sum_j \underline{p}_j dq_j + Q_j d\underline{P}_j + (\bar{H} - H) dt$$

d.h.

$$F_2 = F_2(\underline{q}, \underline{P}, t) \quad \text{mit}$$

(293)

$$\underline{p}_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial \underline{P}_j}$$

(294)

$$\bar{H} - H = \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Man kann, falls $\det \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_j \partial \underline{P}_k} \right) \neq 0$ nach $\underline{P}_j$ auflösen und damit legt F_2 die Trafo vollständig fest

Analog kann man noch zwei weitere Legendre-Transformationen ausführen

$$F_1(\underline{q}, \underline{Q}, t) \rightarrow \underline{F_3(p, Q, t)} = F_1 - \sum_j \frac{\partial F_1}{\partial q_j} q_j$$

(296)

$$= F_1 - \sum_j p_j q_j$$

mit

(297)

$$q_j = - \frac{\partial F_3}{\partial p_j}$$

$$P_j = - \frac{\partial F_3}{\partial Q_j}$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

sowie

$$F_1(\underline{q}, \underline{Q}, t) \rightarrow \underline{F_4(p, P, t)} = F_1 - \sum_j \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} q_j + \frac{\partial F_1}{\partial p_j} p_j \right)$$

(298)

$$= F_1 - \sum_{j=1}^s p_j q_j + \sum_{j=1}^s P_j Q_j$$

mit

(299)

$$q_j = - \frac{\partial F_4}{\partial p_j}$$

$$Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j}$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

(D) Einfache Beispiele

(i) Punktrafo der Koordinaten

$$F_2 = \sum_j f_j(\underline{q}, t) p_j$$

$$\Rightarrow Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial p_j} = f_j(\underline{q}, t)$$

$$p_e = \frac{\partial F_2}{\partial q_e} = \sum_j \frac{\partial f_e}{\partial q_j} p_j = \sum_{j,e} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_j \partial p_e} p_e$$

(ii) Punktrafo der Impulse

$$F_3 = - \sum_j g_j(\underline{p}, t) Q_j$$

$$\Rightarrow p_j = - \frac{\partial F_3}{\partial Q_j} = g_j(\underline{q}, t) \quad \text{analog}$$

(iii) 1-dim. harmonischer Oszillator

$$(300) \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2$$

wählen
(301)

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 \cot Q$$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m \omega_0 q \cot Q$$

d.h.
(302)

$$Q = \operatorname{arccot} \left(\frac{p}{m \omega_0 q} \right)$$

und
(303)

$$P = - \frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}$$

umgekehrt

(304)

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega_0}} \sin Q$$

$$p = \sqrt{2mP\omega_0} \cos Q$$

und

$$\bar{H} = H(q(Q, P), p(Q, P))$$

$$= \frac{1}{2m} \cancel{2m} P \omega_0 \cos^2 Q + \frac{1}{2} \cancel{m} \omega_0^2 \frac{2P}{\cancel{m\omega_0}} \sin^2 Q$$

||

$$(305) \quad \bar{H} = \omega_0 P (\cos^2 Q + \sin^2 Q) = \omega_0 P$$

Q ist zyklisch!

$$(306) \quad \underline{\underline{P(t) = P_0 = \text{const}}}$$

$$(307) \quad \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega_0 \quad \underline{\underline{Q(t) = \omega_0 t + Q_0}}$$

harm Oszillator $\hat{=}$ lineare Bewegung

$$(308) \quad \underline{\underline{q(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega_0}} \sin(\omega_0 t + Q_0)}}$$

$$(309) \quad \underline{\underline{p(t) = \sqrt{2P_0 m \omega_0} \cos(\omega_0 t + Q_0)}}$$

$\Rightarrow$ kanonische Transformtionen können verschiedene integrable Modelle aufeinander abbilden

Satz: Unter kanonischen Trafs bleiben fundamentale Poissonklammern invariant

allg. Theorie der konstruierbaren kanonischen Trafs
 $\Rightarrow$ Hamilton-Jacobi Theorie