

III.4 Phasenraum und Liouvillscher Satz

(A) Phasenraum eines kanonischen Systems

mechanisches System mit holonomem (aber nicht unbedingt zeitabhängigen) Zwangsbedingungen

$$q_1, q_2, \dots, q_s$$

verallg. - koord.

$$p_1, p_2, \dots, p_s$$

verallg. Impulse

kanonisches System: $\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right) \neq 0$
 $\Rightarrow$ es existiert

$$H = H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s; t)$$

kanonische Gleichungen

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$\dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

DGL 1. Ordnung in $2s+1$ dim. Raum
vollständig bestimmt durch Anfangsbedingungen
und H

$$q_k(t_0) = q_{k0}$$

$$p_k(t_0) = p_{k0}$$

Satz Ein kanonisches System wird vollständig durch Bahnkurven im Phasenraum $\mathcal{P}$

$$\underline{q} = (q_1, \dots, q_s) \quad \underline{p} = (p_1, \dots, p_s)$$

beschrieben

Bspl: harmonischer Oszillator in 1D

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m} p$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega_0^2 q$$

reskalierte Variable

$$\tilde{q} = \omega_0 \sqrt{m} q$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{m}}$$

$\Rightarrow$

$$\dot{\tilde{q}} = \omega_0 \tilde{p}$$

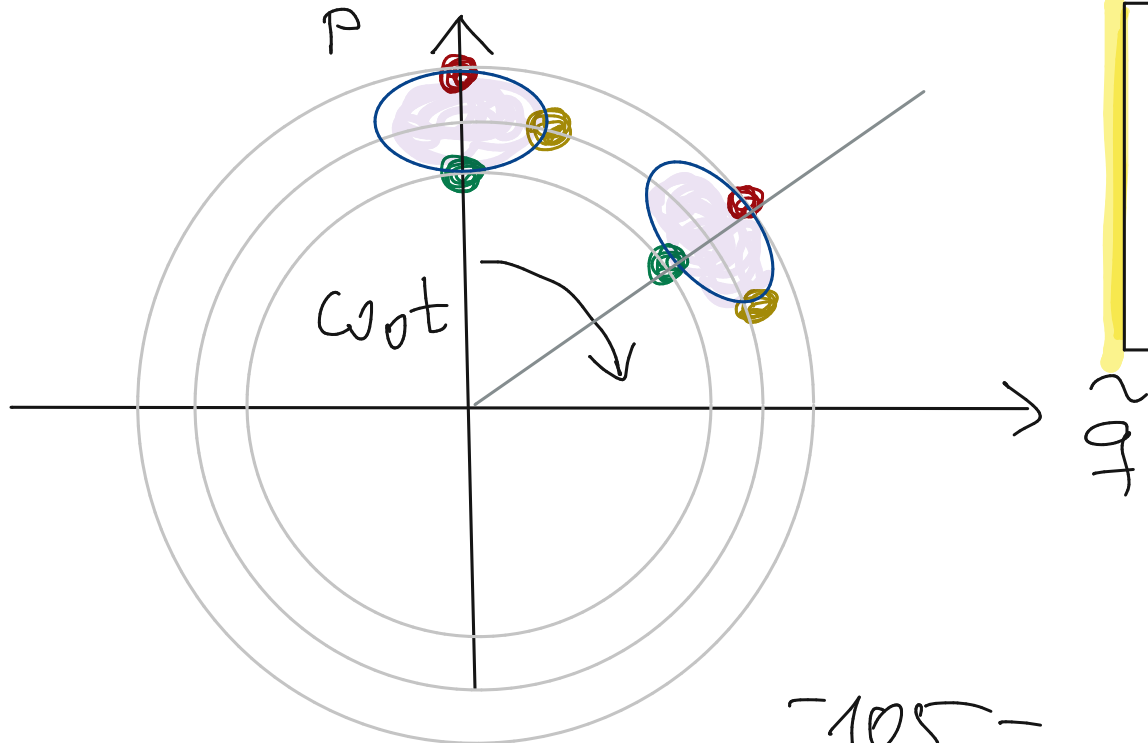
$$\dot{\tilde{p}} = -\omega_0 \tilde{q}$$

Lösung:

$$\tilde{q} = \tilde{r} \cos \varphi$$

$$\tilde{p} = \tilde{r} \sin \varphi$$

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi$$



Fläche (Volumen)
und Orientierung
bleiben erhalten

(B) Satz von Liouville

kanonische Gleichungen können in Vektorform geschrieben werden

$$(257) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \underline{q}(t) \\ \underline{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \underline{q}} \end{pmatrix}$$

Definieren wir die verallgemeinerte Divergenz

$$(258) \quad \text{div} = \left(\frac{\partial}{\partial q_j}, \frac{\partial}{\partial p_j} \right)$$

dann gilt

$$(259) \quad \text{div} \begin{pmatrix} \dot{\underline{q}}(t) \\ \dot{\underline{p}}(t) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_j} \right) = 0$$

D.h. das Geschwindigkeitsfeld $\begin{pmatrix} \dot{\underline{q}} \\ \dot{\underline{p}} \end{pmatrix}$ ist divergenzfrei

$\hat{=}$ inkompressible Flüssigkeit

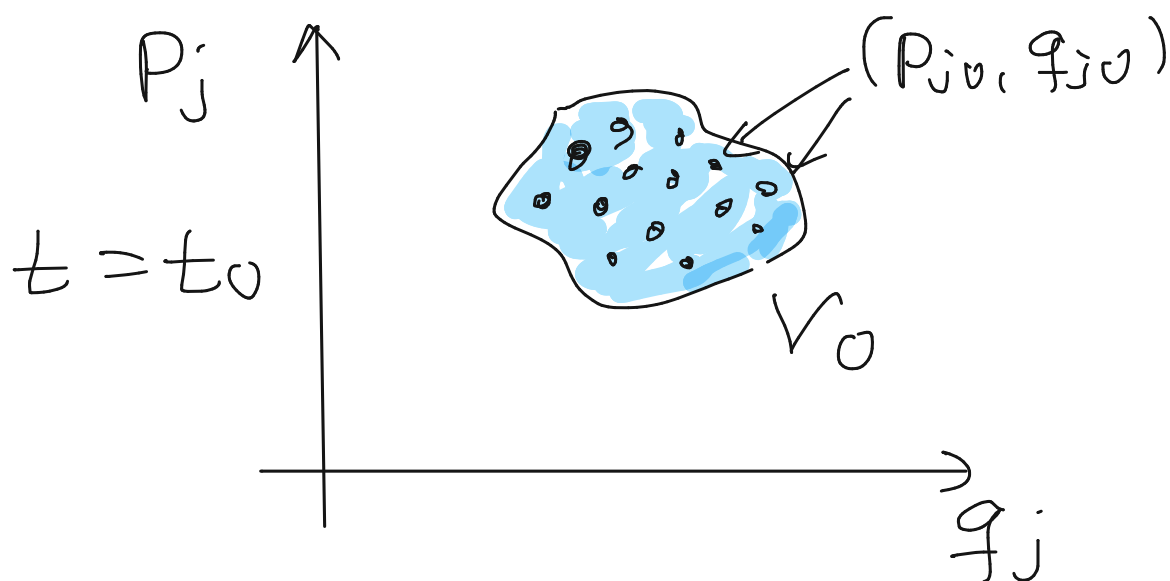
Wie ist diese Analogie zu verstehen?

$\Rightarrow$ Betrachten ein Ensemble von Teilchensystemen mit N Teilchen mit

Anfangsbedingungen q_{j0}, p_{j0}

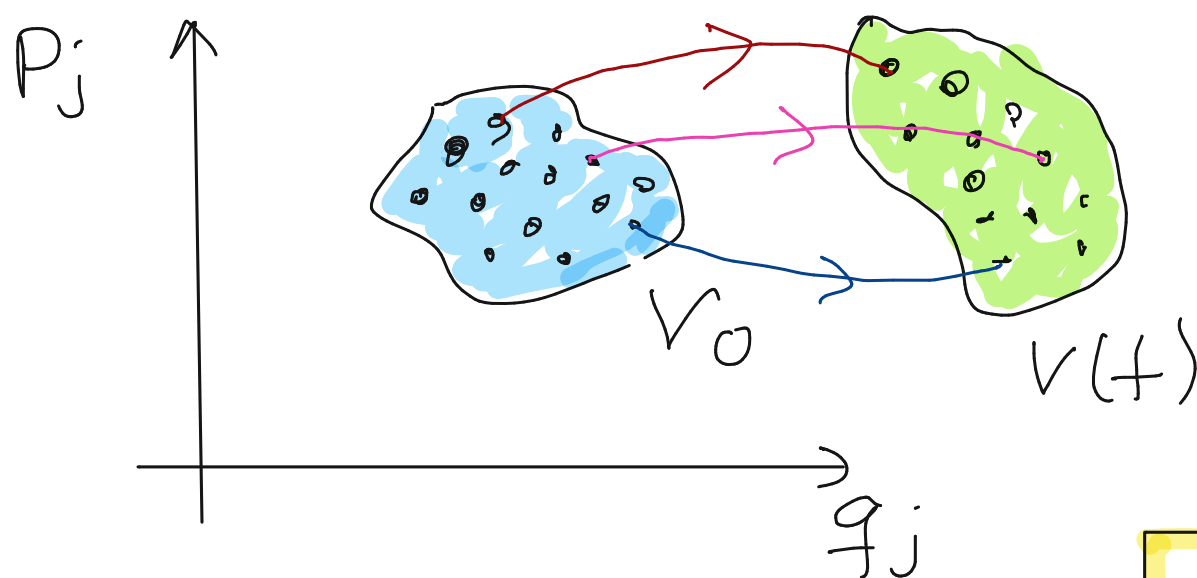
$$q_j(t_0) = q_{j0} \quad p_j(t_0) = p_{j0}$$

die gleichmäßig verteilt sind über ein Volumen V_0 im Phasenraum



analog für alle anderen j

Im Laufe der Zeit werden sich die Punkte im Phasenraum bewegen



(260)

Man kann zeigen, daß gilt

$$V(t) = V_0$$

In einem kanonischen System ist das orientierte Phasenraumvolumen zeitlich konstant.

Satz von Liouville (Bew: Zusatzvideo)

Zusatzkapitel (Zusatzvideo)

(C) Symplektische Struktur des Phasenraumes *

Wir können die kanonischen Gleichungen (257) auch in der Form

$$(261) \quad \underline{\dot{x}} = \underline{\mathbb{J}} \nabla_x H$$

Schreiben mit

$$(262) \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad \nabla_x = \begin{pmatrix} \partial/\partial q_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial q_s \\ \partial/\partial p_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial p_s \end{pmatrix}$$

und

$$(263) \quad \underline{\mathbb{J}} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{1}_s \\ -\underline{1}_s & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\mathbb{J}}$ hat Eigenschaften wie die Paulimatrix $i\sigma_y$

$$(264) \quad \underline{\mathbb{J}}^{-1} = -\underline{\mathbb{J}} \quad \underline{\mathbb{J}}^2 = -\underline{1}_{2s}$$
$$\underline{\mathbb{J}}^T = \underline{\mathbb{J}}^{-1} = -\underline{\mathbb{J}}$$

Def: Eine $2s$ -dimensionale Matrix $\underline{M}$ heißt symplektisch, falls gilt

$$(265) \quad \underline{M}^T \underline{J} \underline{M} = \underline{J}$$

Satz: Die symplektischen Matrizen bilden eine Gruppe bzgl. der Hintereinanderausführung

symplektische Gruppe $SP_{2s}(\mathbb{R})$

Bew.:

$$(i) \quad M_3 = M_1 M_2$$

$$M_3^T J M_3 = M_2^T \underbrace{M_1^T J M_1}_{=J} M_2 = M_2^T J M_2 = J$$

(ii) Assoziativität ✓

(iii) Einselement $E = \underline{1}$ $\underline{1}^T J \underline{1} = J$

(iv) inverses Element

$$M \rightarrow M^{-1} = J^{-1} M^T J$$

$$M^{-1} M = J^{-1} M^T J M = J^{-1} J = \underline{1}$$

Folgerungen

- $\det(M^2) = 1$
- J ist Element von $Sp(\mathbb{R})$ $J^T J J = J$
- $(M^T)^T J M^T = M J M^T = M J J M^{-1} J^{-1}$
 $= M J (-J^{-1}) M^{-1} (-J) = J$

Def: Schiefsymmetrisches Skalarprodukt
zwischen Vektoren $\underline{x}, \underline{y}$ im Phasenraum P

$$(26.6) \quad \underline{x} \circ \underline{y} = \underline{x}^T J \underline{y} = x_i J_{ik} y_k$$

Eigenschaften

(i) anti-symmetrisch $\underline{x} \circ \underline{y} = -\underline{y} \circ \underline{x}$

(ii) linear $\underline{x} \circ (\lambda_1 \underline{y}_1 + \lambda_2 \underline{y}_2) = \lambda_1 \underline{x} \circ \underline{y}_1 + \lambda_2 \underline{x} \circ \underline{y}_2$

(iii) für 2 dim. Matrix, d.h. $S=1$

$$(26.7) \quad \underline{x} \circ \underline{y} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$
$$= \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

Es gilt

Satz

Das schiefssymmetrische Skalarprodukt ist invariant unter symplektischen Transformationen

$$(268) \quad \underline{y}' = \underline{M} \underline{y} \quad \underline{x}' = \underline{M} \underline{x}$$

und $\underline{M}$ ist symplektische Matrix

$$\underline{y}' \circ \underline{x}' = \underline{y} \circ \underline{x}$$

Bew:

$$\underline{x}' \circ \underline{y}' = (\underline{M} \underline{x})^T \underline{J} (\underline{M} \underline{y})$$

$$= \underline{x}^T \underline{M}^T \underline{J} \underline{M} \underline{y} = \underline{x}^T \underline{J} \underline{y} \quad \square$$

Bem:

Die symplektische Gruppe mit dem schiefssymmetrischen Skalarprodukt ist eine Verallgemeinerung der Drehgruppe $O(n)$ mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt

Wir werden jetzt sehen, daß die zeitliche Evolution der Punkte im Phasenraum einer symplektischen Abbildung entspricht.

$$\underline{x}(t_0) \xrightarrow[\text{Abbildung}]{\text{symplektische}} \underline{x}(t) \quad \text{mit } \underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{q} \\ \underline{p} \end{pmatrix}$$

D.h.
(269)

$$d\underline{x}(t) = \underline{\underline{D}}(t, t_0) d\underline{x}_0$$

Satz: Sei $\underline{x}(t) = \underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0)$ eine Lösung der kanonischen Gleichungen

Liouville

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}} \nabla_{\underline{x}} H$$

eines hamiltonischen Systems, dann ist die $2s \times 2s$ Matrix

$$(270) \quad \begin{aligned} D_{mn} &= D_{mn}(t, t_0, \underline{x}_0) \\ &= \frac{\partial x_m(t)}{\partial x_{n0}} = \nabla_{\underline{x}} \circ \underline{x} \\ &\text{eine symplektische Matrix} \end{aligned}$$

Folgerung

symplektische
Abbildung

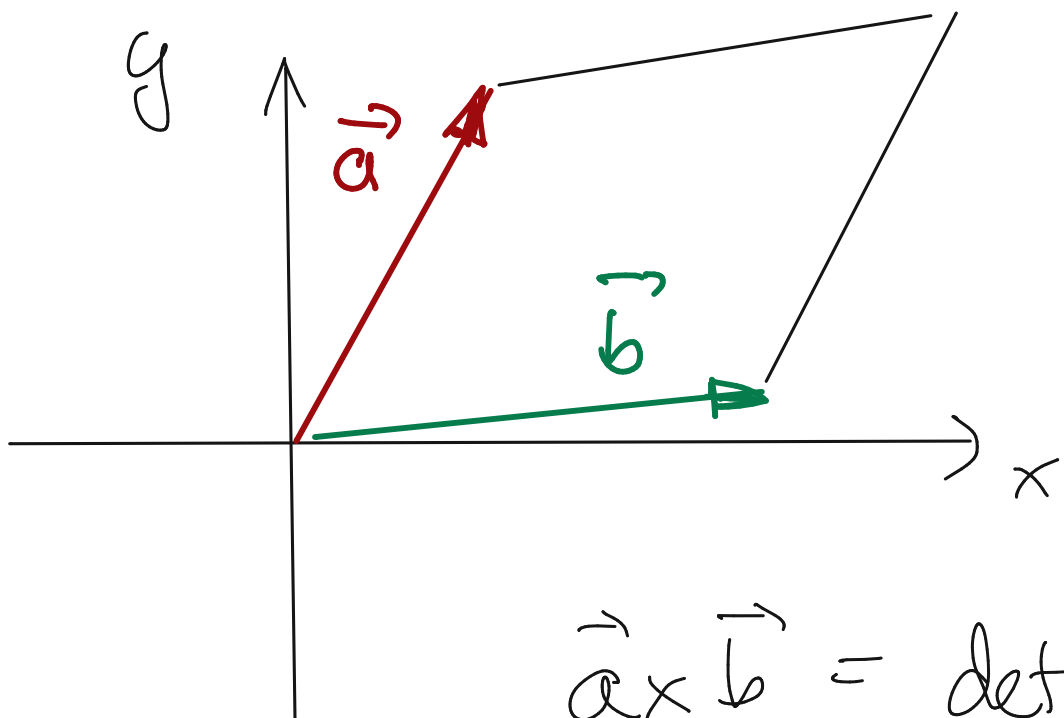
$$(271) \quad d\underline{x}(t=t_0) \longrightarrow d\underline{x}(t)$$

Dynamik erhält symplektisches
Skalarprodukt

Bedeutung?

• betrachten $S=1$

$$(272) \quad \underline{a} \circ \underline{b} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = A = V_2$$



$A = V_2$
 orientiertes Volumen
 in 2dim Raum
 des Parallelogramms
 aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \vec{e}_z$$

• beliebiges s

Vektoren $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(2s)}$ spannen Parallel-
 epiped in $2 \times 2s$ Dimensionen

Def

(273)
$$V_{2s} \equiv \det \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_{2s}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{(2s)} & \dots & a_{2s}^{(2s)} \end{pmatrix}$$

orientiertes Volumen des durch
 $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(2s)}$ aufgespannten
 Parallelepiped

(274)
$$V_{2s} \equiv [\underline{a}^{(1)} \circ \underline{a}^{(2)} \circ \underline{a}^{(3)} \dots \circ \underline{a}^{(2s)}]$$

Das orientierte Volumen eines Parallelepipeds aus $2s$ Vektoren $\underline{x}^{(1)}, \dots, \underline{x}^{(2s)} \in \mathbb{P}$ ist invariant unter symplektischen Transformationen

$$(275) \quad \underline{\tilde{x}}^{(i)} = \underline{M} \underline{x}^{(i)} \quad \text{mit} \quad \underline{M} \in \text{Sp}_{2s}$$

Wichtige Folgerung

In einem kanonischen System ist das orientierte Phasenraumvolumen aus $2s$ Vektoren (q_i, p_i) zeitlich konstant

Liouville

Beweis:

$$V(t_0) = \int_{\mathcal{U}_0} d^{2s} \underline{x}(t_0)$$

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{\mathcal{U}_0} d^{2s} \underline{x}(t) = \int_{\mathcal{U}_0} d^{2s} \underline{x}(t_0) \underbrace{\det \left(\frac{\partial \underline{x}(t)}{\partial \underline{x}(t_0)} \right)}_{=+1} \\ &= V(t_0) \end{aligned}$$

Beweis (270)

$$\underline{\underline{D}}(t_0, t_0, \underline{x}_0) = \underline{\underline{1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{J}} \underline{\underline{D}}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{D}}^T \right) \underline{\underline{J}} \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{J}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{D}} \right)$$

$$\frac{\partial \underline{D}}{\partial t}_{jk} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_{k0}} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_e} \frac{\partial x_e}{\partial x_{k0}} \quad \text{Sammelhono.}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_e} \left(J_{jm} \frac{\partial H}{\partial x_m} \right) \frac{\partial x_e}{\partial x_{k0}} = J_{jm} \frac{\partial^2 H}{\partial x_e \partial x_m} \frac{\partial x_e}{\partial x_{k0}}$$

d.h.

$$\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = \underline{\underline{J}} \left(\nabla_x \circ \nabla_x H \right)$$

d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{J}} \underline{\underline{D}}) &= \underline{\underline{D}}^T (\nabla_x \circ \nabla_x H)^T \underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{J}} \underline{\underline{D}} \\ &\quad + \underline{\underline{D}}^T \underbrace{\underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}}_{=-\underline{\underline{1}}} (\nabla_x \circ \nabla_x H) \underline{\underline{D}} \end{aligned}$$

$$= \underline{\underline{D}}^T \left[\underbrace{(\nabla_x \circ \nabla_x H)^T}_{=(\nabla_x \circ \nabla_x H)} - (\nabla_x \circ \nabla_x H) \right] \underline{\underline{D}} = 0 \quad \square$$