

III. Hamiltonformalismus

Die Hamiltonsche Formulierung der Mechanik
wird aus einem tieferen Einblick in die formale
mathematische Struktur der theoretischen Mechanik
liefern

Erinnerung: falls $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$(203) \quad \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \right) = 0$$

wobei

$$H = H(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$$

die Hamiltonfunktion ist und wir

$$(204) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k \quad \text{kanonischen Impuls}$$

genannt haben.

Frage: Ist $H = H(q_k, p_k, t)$?

III.7 Legendre Transformation

$$L(q_k, \dot{q}_k) \quad \overset{?}{\longleftrightarrow} \quad H(q_k, p_k)$$

Legendre Transformation

gegeben $f = f(x)$ zweimal stetig differenzierbar

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$$

$$u \equiv \frac{df(x)}{dx}$$

$$f(x) \quad \overset{?}{\longleftrightarrow} \quad g(u)$$

Umkehrung

$$x = \frac{dg}{du}$$

$$(205) \quad df = u \, dx = d(ux) - x \, du$$

$$\Rightarrow \quad d(f - ux) = -x \, du$$

$$(206) \Rightarrow \quad \underline{\underline{g(u) = ux - f}}$$

Def: Sei $f = f(x)$ reell und 2 mal stetig differenzierbar

mit $u \equiv \frac{df}{dx}$ und sei $\frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$. Dann

$$\text{heißt} \quad g(u) = \mathcal{L}[f] = ux - f(x) = \frac{df}{dx} x - f$$

Legendre transformierte

Frage: warum
und nicht $\tilde{g}(u) = f(x(u))$?

Bspl: $f_1(x) = \alpha x^2$

$$u_1 = \frac{df_1}{dx} = 2\alpha x$$

$$x = \frac{u_1}{2\alpha}$$

$$\tilde{g}_1(u_1) = \alpha \left(\frac{u_1}{2\alpha} \right)^2$$

$$f_2(x) = \alpha(x+c)^2$$

$$u_2 = \frac{df_2}{dx} = 2\alpha(x+c)$$

$$x = \frac{u_2}{2\alpha} - c$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2(u_2) &= \alpha \left(\frac{u_2}{2\alpha} - c + c \right)^2 \\ &= \alpha \left(\frac{u_2}{2\alpha} \right)^2 \end{aligned}$$

d.h. $\tilde{g}_1 \stackrel{\sim}{=} \tilde{g}_2$ aber $f_1 \neq f_2$

d.h. Transformation wäre nicht umkehrbar
eindeutig!

(207)

$$\begin{array}{ccc} f(x) & = & u \frac{dg}{du} - g(u) \\ \downarrow & & \\ x = x(u) \leftarrow u = \frac{df(x)}{dx} & & x = \frac{dg}{du} \rightarrow u = u(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x \frac{df}{dx} - f(x) & = & g(u) \end{array}$$

Schema der Legendretransformation

Bem.: $\frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$ wichtige Voraussetzung, sonst
 $\frac{df}{dx} = u = \text{konst}$ und u keine Variable

Legendretrafo einer Funktion mehrerer Variabler

Def.: Sei $f(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$ reell und in allen x_j zweimal stetig differenzierbar mit

$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \neq 0$$

Down heißt

$$(u_j \equiv \frac{\partial f}{\partial x_j})$$

$$(208) \quad g(u_1, \dots, u_m; y_1, y_2, \dots, y_n) = \mathcal{L}_{x_1, \dots, x_m} [f] \\ = \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - f = \sum_{i=1}^m x_i u_i - f$$

Legendretrafo von f bzgl. $x_1, x_2, \dots, x_m$

Bem.: $\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \neq 0$ wichtig, da sonst

$$du_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial u_i}{\partial x_m} dx_m = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_m} dx_m$$

nicht nach dx_m auflösbar und damit
 u_i keine echte Variable

III.2 kanonische Gleichungen

(A) Ableitung der kanonischen Gleichungen

Satz: Die Lagrangefunktion $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ kann umkehrbar eindeutig auf die Hamiltonfunktion

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_{k=1}^s \dot{q}_k p_k - L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

(209)

abgebildet werden, wobei

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

die kanonisch konjugierten Impulse sind und falls

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_e} \neq 0$$

Es gilt

$$dH = \sum_{i=1}^s (\dot{q}_i dp_i + \cancel{d\dot{q}_i p_i}) - \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_{i=1}^S \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Wenn ist $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i$

d.h.

(20) $dH = \sum_{i=1}^S \left(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$

Daraus folgen folgende wichtige Relationen

(21)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

(22)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen oder
kanonische Bewegungsgleichungen

- kanonische Gleichungen sind gekoppelter DGL System 1. Ordnung für 2s Variable $\{q_i, p_i\}$ die den Phasenraum aufspannen

• Es gilt

$$\begin{aligned}
 (213) \quad \frac{dH}{dt} &= \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\
 &= \sum_{i=1}^s \underbrace{\left(-\dot{p}_i \dot{q}_i + \dot{q}_i \dot{p}_i \right)}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$$(214) \quad \boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}}$$

$\Rightarrow$ falls L nicht explizit zeitabhängig ist, ist H Integral der Bewegung (haben wir schon früher abgeleitet)

• betrachten konservatives System mit holonomem Zwangsbedingungen

$$L = T - V \quad \text{und} \quad V = V(\vec{r}_j)$$

$$\begin{aligned}
 (215) \quad T &= \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{k,e=1}^s M_{ke} \dot{q}_k \dot{q}_e \\
 &\quad + \sum_{k=1}^s \alpha_k \dot{q}_k + \alpha_0
 \end{aligned}$$

wobei

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_k, t) \quad \text{benutzt wurde}$$

d.h.

$$\frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$(216) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} \right)^2$$

$$(217) \quad \alpha_k = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}$$

$$(218) \quad \mu_{ke} = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_e}$$

Damit kann die Lagrangefunktion i.A. als Summe dreier Terme geschrieben werden:

$$(219) \quad L = L_2 + L_1 + L_0$$

wobei L_m - homogene Funktionen mit m Grad in $\dot{q}_k$ sind

$$(220) \Rightarrow \sum_{k=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2L_2 + L_1$$

(i) skleronome Zwangsbedingungen

$$(221) \quad \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} = 0 \quad \alpha = 0 \quad \alpha_k \equiv 0$$

damit
(222)

$$L = L_2 - V \quad \text{und}$$

$$\sum_{k=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2L_2 = 2(L+V)$$

$\Rightarrow$

(223)

$$H = \sum_{k=1}^s p_k \dot{q}_k - L = 2(L+V) - L$$

$$= L + 2V = T + V = E$$

(224)

$$H = E$$

für konservative Systeme
und holonom-scleronome
Zwangsbedingungen

(B) Einfache Beispiele

(i) Teilchen im Zentralkraftfeld

$$\vec{L} = \text{konst}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{L} = 0$$

verallg. Koordinaten in Ebene $\perp \vec{L}$

$$(r, \varphi)$$

$$L = T - V(r) = \frac{1}{2}(m \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

$$(225) \quad \det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_e} = \det \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{pmatrix} = m^2 r^2 \neq 0$$

(für $r \neq 0$) 😊

$$(226) \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned} H &= \dot{r} p_r + \dot{\varphi} p_\varphi - L \\ &= m \dot{r}^2 + m r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) \\ &= \frac{1}{2} (m \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) \end{aligned}$$

$$(227) \quad H = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{1}{2mr^2} p_\varphi^2 + V(r)$$

Kanonische Gleichungen:

$$(228) \quad \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{1}{m} p_r \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{mr^2} p_\varphi$$

$$(229) \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

d.h.

$$(230) \quad p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} = L_z = \text{konst}$$

(ii) geladenes Teilchen im elm. Feld

$$(231) \quad L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - e\phi + e \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$(232) \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_j + e A_j(\vec{r}, t)$$



kanonischer Impuls $\neq$ kinetischer Impuls

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j p_j - L = \dot{x}_j p_j - L \\ &\quad \text{Einstein} \\ &\quad \text{Konvention} \\ &= \dot{x}_j (m \dot{x}_j + \cancel{e A_j}) - \frac{1}{2} m \dot{x}_j \dot{x}_j + e \phi \\ &\quad - \cancel{e \dot{x}_j A_j} \end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{2} m \dot{x}_j \dot{x}_j + e \phi$$

mit $\dot{x}_j = p_j - e A_j$ folgt schliesslich

$$(233) \quad \underline{\underline{H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e \vec{A})^2 + e \phi}}$$

Minimal-Kopplungs Hamiltonfunktion

(C) Modifiziertes Hamiltonsches Prinzip und kanonische Gleichungen

Es war

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_j, \dot{q}_j, t) = 0$$

$\Rightarrow$

$$(234) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(\sum_{k=1}^s p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t) \right)}_{= \mathcal{F}} = 0$$

Jetzt definieren wir die Wirkung im Phasenraum

$$(235) \quad F = F [q_k, p_k, \dot{q}_k, \dot{p}_k, t]$$

D.h. wir betrachten Variationen über Bahnen im Phasenraum mit

$$(236) \quad \begin{aligned} \delta q_k(t_1) &= \delta q_k(t_2) = 0 \\ \delta p_k(t_1) &= \delta p_k(t_2) = 0 \end{aligned}$$

Euler-Lagrange für F aus (234) $\Rightarrow$

$$(237) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial F}{\partial q_k} \quad \underline{\underline{\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_k} = \frac{\partial F}{\partial p_k} \quad 0 = \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$(238) \quad \underline{\underline{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}}}$$

III. 3 Poisson Klammer

Def: Es seien $f(\underline{q}, \underline{p}, t)$ und $g(\underline{q}, \underline{p}, t)$ reelle Funktionen von $\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s)$ und $\underline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ und der Zeit t .

(239) Dann heißt

$$\{f, g\}_{f,p} \equiv \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right)$$

Poisson-Klammer von f und g

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \frac{df}{dt} &= \sum_{n=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f}{\partial p_n} \dot{p}_n \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_{n=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial q_n} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

D.h.

(240)

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{f,p} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Speziell gilt

(241)

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\}_{f,p}$$

$$\dot{p}_j = \{p_j, H\}_{f,p}$$

fundamentale Poissonklammern

$$\{q_j, q_k\}_{f,p} = 0$$

$$\{p_j, p_k\}_{f,p} = 0$$

$$\{q_j, p_k\}_{f,p} = \delta_{jk}$$

(242)

Beweis:

$$\{q_j, p_k\}_{q,p} = \sum_{\ell=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial q_\ell} \frac{\partial p_k}{\partial p_\ell} - \frac{\partial q_j}{\partial p_\ell} \frac{\partial p_k}{\partial q_\ell}$$

$\parallel \qquad \parallel$
 $\delta_{je} \quad \delta_{ke}$
 $\qquad \parallel \quad \parallel$
 $\qquad \qquad \qquad 0 \quad 0$

$$= \sum_{\ell=1}^s \delta_{je} \delta_{k\ell} = \delta_{jk} \quad \square$$

Satz: Der Wert einer Poissonklammer ist unabhängig von der Wahl der konkreten kanonischen Variablen

$$\{A, B\}_{q,p} = \{A, B\}_{Q,P} \equiv \{A, B\}$$

Beweis: $(\underline{q}, \underline{p}) \longleftrightarrow (\underline{Q}, \underline{P})$

$$\{F, G\}_{q,p} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right)$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_j} \left(\frac{\partial G}{\partial Q_e} \frac{\partial Q_e}{\partial p_j} + \frac{\partial G}{\partial P_e} \frac{\partial P_e}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_j} \left(\frac{\partial G}{\partial Q_e} \frac{\partial Q_e}{\partial q_j} + \frac{\partial G}{\partial P_e} \frac{\partial P_e}{\partial q_j} \right) \right\}$$

$$= \sum_e \frac{\partial G}{\partial Q_e} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial Q_e}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial Q_e}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial G}{\partial P_e} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial P_e}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial P_e}{\partial q_j} \right) \quad \text{---gr--}$$

(243)

$$= \sum_e \left(\frac{\partial G}{\partial Q_e} \{F, Q_e\}_{q,p} + \frac{\partial G}{\partial P_e} \{F, P_e\}_{q,p} \right)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \dot{Q}_e &= \sum_j \left(\frac{\partial Q_e}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_e}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = \sum_j \left(\frac{\partial Q_e}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_e}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_{j,k} \left[\frac{\partial Q_e}{\partial q_j} \left(\frac{\partial H}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial Q_e}{\partial p_j} \left(\frac{\partial H}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial H}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \right] \\ (244) \quad &= \sum_{j,k} \left[\frac{\partial H}{\partial Q_k} \left(\frac{\partial Q_e}{\partial q_j} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_e}{\partial p_j} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial H}{\partial P_k} \left(\frac{\partial Q_e}{\partial q_j} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_e}{\partial p_j} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \right] \\ &= \sum_k \left[-\dot{P}_k \{Q_e, Q_k\}_{q,p} + \dot{Q}_k \{Q_e, P_k\}_{q,p} \right] \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort

$$(245) \quad \{Q_e, Q_k\}_{q,p} = 0 \quad \{Q_e, P_k\}_{q,p} = \delta_{ek}$$

analog kann man zeigen

$$(246) \quad \{P_e, P_k\}_{q,p} = 0$$

Setzt man in Gl. (243) speziell $F = Q_k$ folgt

$$(247) \quad \{Q_k, G\}_{q,p} = \frac{\partial G}{\partial Q_k}$$

Analog für $G = P_k$ folgt

$$(248) \quad \{P_k, G\}_{q,p} = -\frac{\partial G}{\partial P_k}$$

Außerdem gilt offensichtlich

$$(249) \quad \{A, B\}_{q,p} = -\{B, A\}_{q,p}$$

Somit

$$\{F, G\}_{q,p} = \sum_e \left(\frac{\partial G}{\partial Q_e} \left(-\frac{\partial F}{\partial P_e} \right) + \frac{\partial G}{\partial P_e} \frac{\partial F}{\partial Q_e} \right)$$

$$= \{F, G\}_{Q,P} \quad \square$$

formale Eigenschaften der Poissonklammer

$$(250) \quad (i) \text{ Antisymmetrie} \quad \{A, B\} = -\{B, A\}$$

$$(ii) \text{ Linearität} \quad \{c_1 A + c_2 B, C\} = c_1 \{A, C\}$$

$$(251) \quad + c_2 \{B, C\}$$

$$(iii) \quad c = \text{konst.} : \text{Nullelement} \quad \{c, A\} = 0 \quad \forall A$$

(252)

(iv) Produktregel

$$(253) \quad \{A, BC\} = B \{A, C\} + \{A, B\} C$$

Bew: Produktregel der Differentiation

(v) Jacobi-Identität

$$(254) \quad \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$$

Bew: ü.A.

Integrale der Bewegung

Satz: Falls F ein Integral der Bewegung (Erhaltungsgröße) ist

d.h.
$$\frac{dF}{dt} = 0$$

gilt
$$0 = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$$

(255)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \{H, F\}$$

Für autonome Systeme, d.h. ohne explizite Zeitabhängigkeit

$$(256) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

$$F: \text{Erhaltungsgröße} \Leftrightarrow \{H, F\} = 0$$

Satz: Die Poissonklammer zweier Integrale der Bewegung ist wieder ein Integral der Bewegung

Poisson'scher Satz

Beweis: F, G Integrale der Bewegung, d.h.

$$\{H, F\} = \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{und} \quad \{H, G\} = \frac{\partial G}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi} \quad 0 &= \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} \\ &\quad + \{H, \{G, F\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{F, -\frac{\partial G}{\partial t}\right\} + \left\{G, \frac{\partial F}{\partial t}\right\} \\ &\quad + \{H, \{G, F\}\} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \{G, F\} + \{H, \{G, F\}\}$$

d.h.,

$$A = \{G, F\} \quad \frac{d}{dt} A = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad \square$$

Bezug zur Quantenmechanik

- (i) messbare physikalische Größen A
(Observable)
 $\Leftrightarrow$ hermitesche Operatoren $\hat{A}$
(dargestellt durch Matrizen)
- (ii) Messwerte $\Leftrightarrow$ Eigenwerte der Matrizen
- (iii) $\{A, B\} \Leftrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}]$
- (iv) fundamentale Vertauschungsregeln
 $[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0 \quad [\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar \delta_{jk}$
- (v) Hamiltonfunktion $\Leftrightarrow$ Hamiltonoperator
 $H \quad \hat{H}$
- (vi) Dynamik
 $\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$