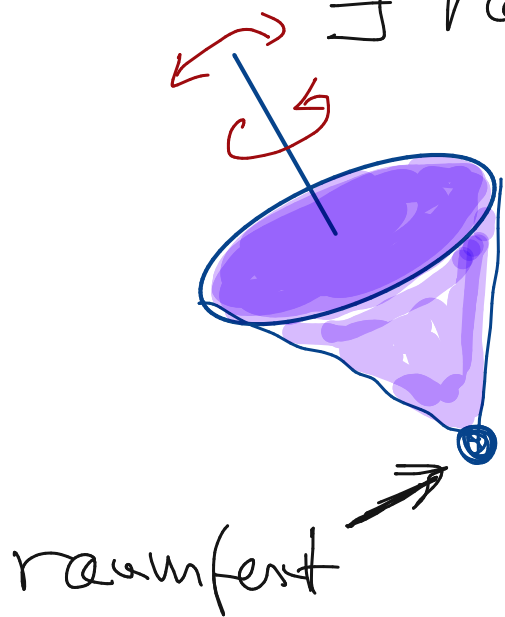


II.5 Theorie des Kreisel

- betrachten speziellen starren Körper:
 $\exists$ raumfester Punkt der Bewegung



"Kreisel"

- wählen raumfesten Punkt als Ursprung eines körperfesten Bezugssystems $\sum_t$

(A) Eulersche Gleichungen

Die Beschreibung phys. Größen des starren Körpers wie z.B. des Drehimpulses ist am einfachsten im körperfesten Hauptachsensystem

$\sum_{HA}$

- Drehimpuls

(139)

$$\vec{\omega} = p(t) \vec{e}_1 + q(t) \vec{e}_2 + r(t) \vec{e}_3$$

(140)

$$\vec{L} = I_1 p \vec{e}_1 + I_2 q \vec{e}_2 + I_3 r \vec{e}_3$$

Drehimpulssatz im bewegten Bezugssystem

mit $\frac{d}{dt} \Big|_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \Big|_{\tilde{\Sigma}} + \vec{\omega} \times$

$$(150) \quad \vec{M} = \frac{d}{dt} \Big|_{\tilde{\Sigma}} \vec{L} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

im körperfesten Hauptachsensystem:

$$\vec{M} = M_1 \vec{e}_1 + M_2 \vec{e}_2 + M_3 \vec{e}_3$$

$$(151) \quad \begin{aligned} M_1 &= I_1 \dot{p} + (I_3 - I_2) q r \\ M_2 &= I_2 \dot{q} + (I_1 - I_3) r p \\ M_3 &= I_3 \dot{r} + (I_2 - I_1) p q \end{aligned}$$

Eulersche Gleichungen

Bem.:

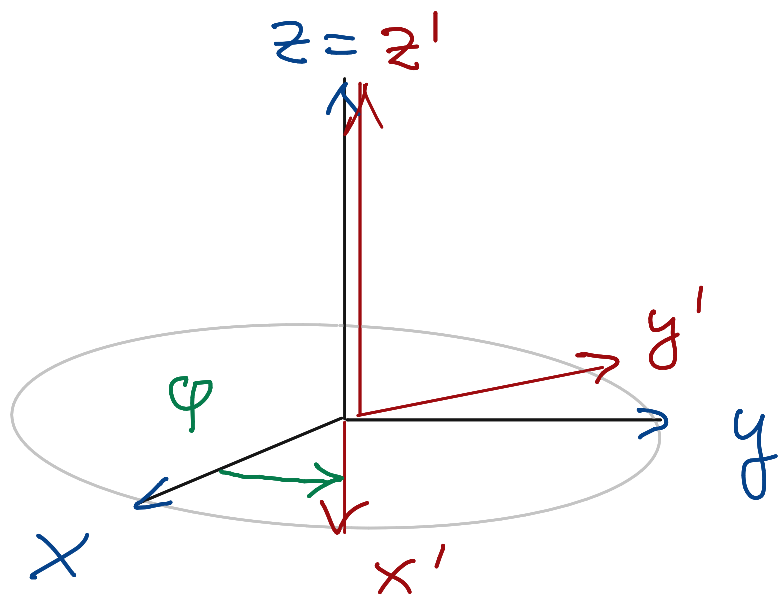
(i) die Euler Gleichungen sind nichtlinear in p, q, r

(ii) alle Größen sind im körperfesten Bezugssystem gegeben!

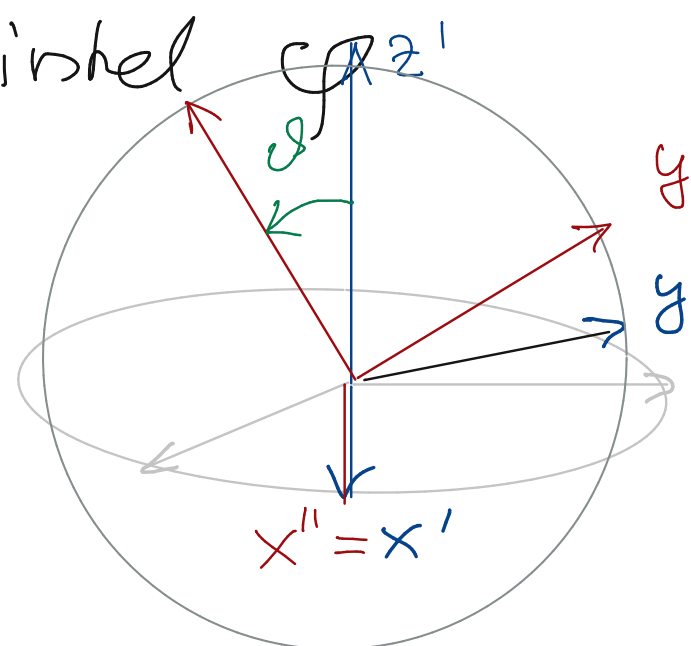
(B) Umrechnung in raumfestes Bezugssystem

Euler Winkel

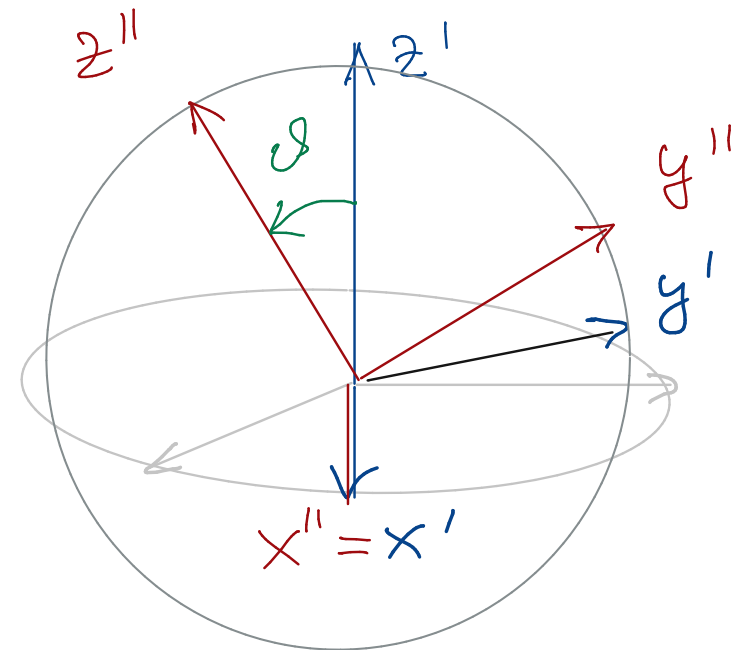
Zerlegung einer beliebigen Rotation in elementare



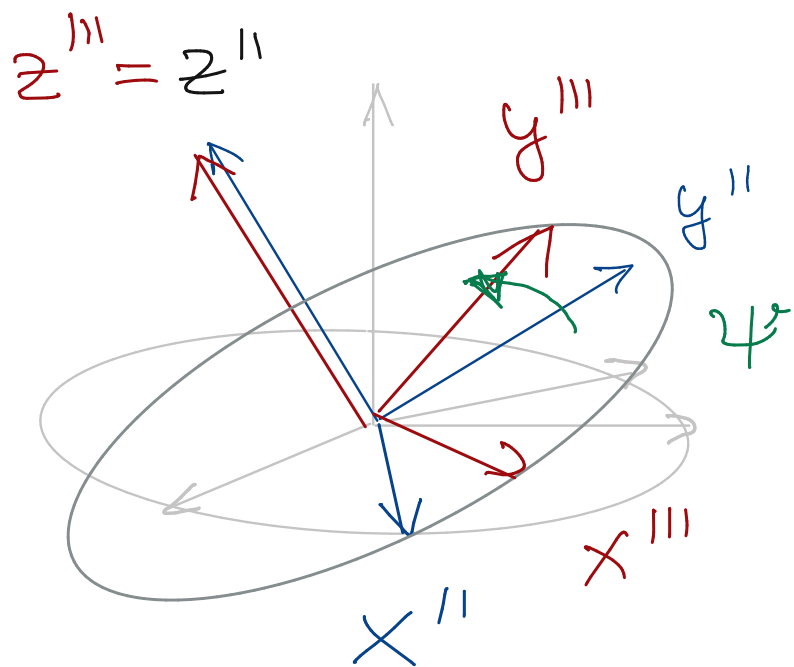
(i) Rotation um z -Achse um Winkel φ



(ii) Rotation um x' -Achse um Winkel ϑ



(iii) Rotation um z'' -Achse um Winkel ψ



Euler Winkel
 φ, ϑ, ψ

• Die Achse $x' = x''$ wird als knotenlinie bezeichnet

• Beziehung zwischen raumfesten (x, y, z) und körperfesten Koordinaten (x''', y''', z''')

$$x''' = \tilde{x} \quad y''' = \tilde{y} \quad z''' = \tilde{z}$$

$\dot{\varphi}$ - Drehung des Körpers um raumfeste z-Achse $\vec{e}_z$

$\dot{\vartheta}$ - Drehung des Körpers um knotenlinie $\vec{e}_k$

$\dot{\psi}$ - Drehung des Körpers um körperfeste z-Achse $\tilde{\vec{e}}_z$

$$(152) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\vartheta} \vec{e}_k + \dot{\psi} \tilde{\vec{e}}_z$$

man ist:

$$\vec{e}_z = \sin \vartheta \sin \varphi \tilde{\vec{e}}_x + \sin \vartheta \cos \varphi \tilde{\vec{e}}_y + \cos \vartheta \tilde{\vec{e}}_z$$

(153)

$$\vec{e}_k = \cos \varphi \tilde{\vec{e}}_x - \sin \varphi \tilde{\vec{e}}_y$$

und damit gilt für $\vec{\omega}$ im körperfesten HA-System

$$(154) \quad \vec{\omega} = p \vec{e}_x + q \vec{e}_y + r \vec{e}_z$$

$$(155) \quad \begin{aligned} p &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\psi} \cos \psi \\ q &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\psi} \sin \psi \\ r &= \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{aligned}$$

(c) Rotation um freie Achsen

Betrachten wir einen kräftefreien starren Körper:
Welche Rotationsbewegungen eines solchen starren Körpers sind stabil?

kräftefreier Körper: Euler Gleichungen

$$I_1 \dot{p} + (I_3 - I_2) q r = 0$$

$$(156) \quad I_2 \dot{q} + (I_1 - I_3) p r = 0$$

$$I_3 \dot{r} + (I_2 - I_1) q p = 0$$

Wir sehen zunächst:

• Multiplikation mit p, q, r und Addition:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (I_1 \dot{\varphi}^2 + I_2 \dot{\theta}^2 + I_3 \dot{\psi}^2) = \frac{d}{dt} T_{\text{rot}}$$

(157) Energieerhaltung

- Multiplikation mit $2I_1 \dot{\varphi}$, $2I_2 \dot{\theta}$, $2I_3 \dot{\psi}$ und Addition:

$$0 = \frac{d}{dt} (I_1^2 \dot{\varphi}^2 + I_2^2 \dot{\theta}^2 + I_3^2 \dot{\psi}^2) = \frac{d}{dt} |\vec{L}|^2$$

(158)

Erhaltung des Betrages des Drehimpulses

- kann Körper um körperfeste Achse stabil rotieren?

$$\begin{aligned} \text{falls ja} \Rightarrow \quad & \vec{L} \cdot \vec{e}_x = \text{konst} & I_1 \dot{\varphi} &= 0 \\ (159) \quad & \text{und } \vec{L} \cdot \vec{e}_y = \text{konst} & I_2 \dot{\theta} &= 0 \\ & \text{und } \vec{L} \cdot \vec{e}_z = \text{konst} & I_3 \dot{\psi} &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$(I_3 - I_2) \dot{\theta} \dot{\psi} = (I_1 - I_3) \dot{\varphi} \dot{\psi} = (I_2 - I_1) \dot{\varphi} \dot{\theta} = 0$$

- Falls alle Hauptträgheitsmomente verschieden sind, d.h.

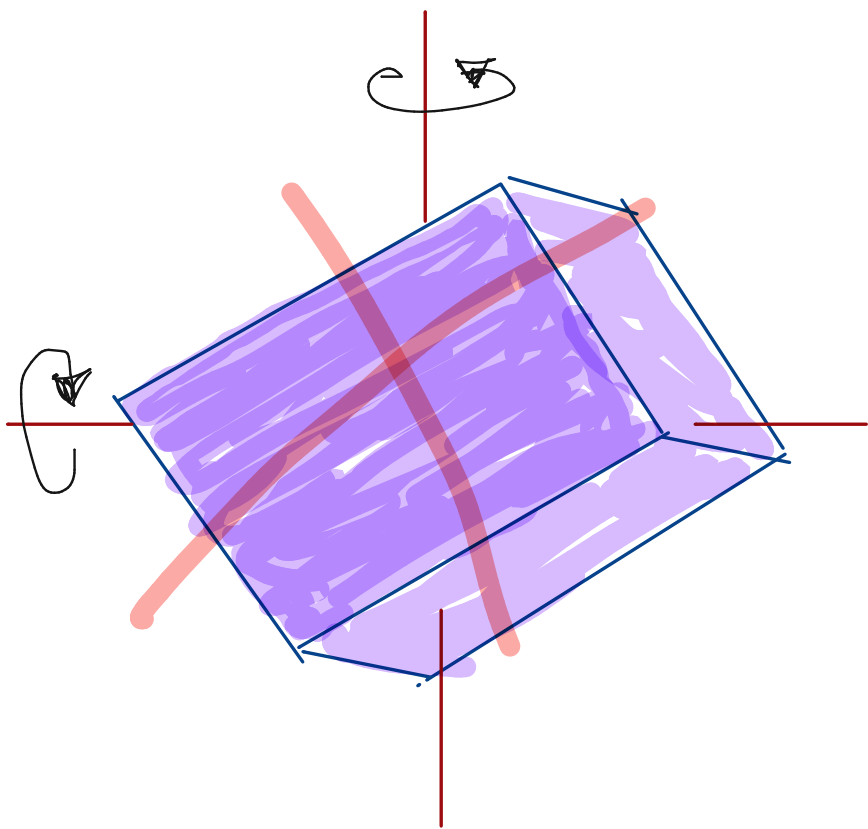
falls $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$

müssen zwei Komponenten von $\vec{\omega}$ im körperfesten Hauptachsensystem verschwinden!

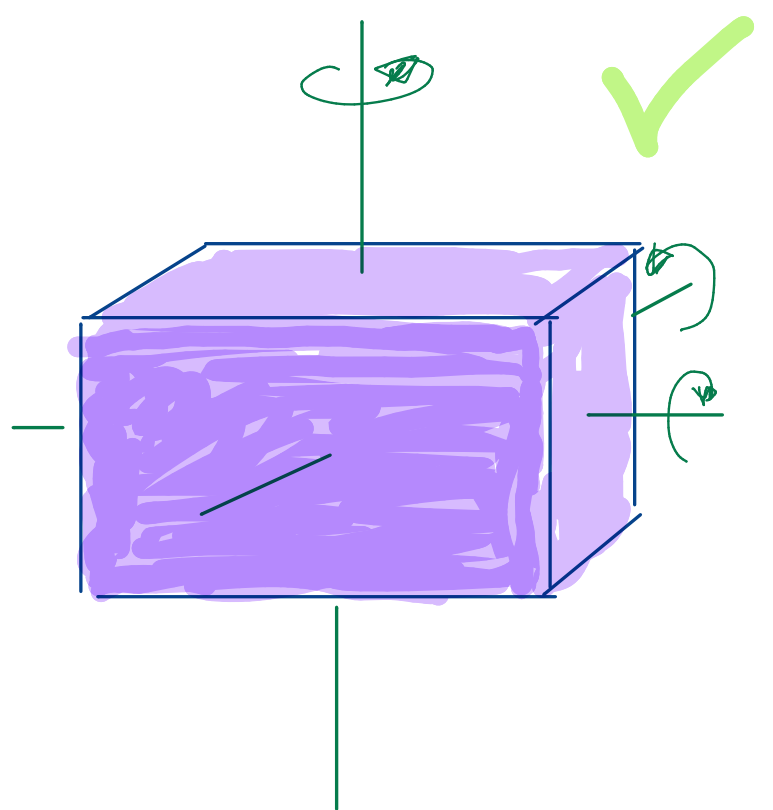
d.h. entweder $\vec{\omega} = p \vec{e}_x$ $\vec{L} = I_1 p \vec{e}_x$
 oder $\vec{\omega} = q \vec{e}_y$ $\vec{L} = I_2 q \vec{e}_y$
 oder $\vec{\omega} = r \vec{e}_z$ $\vec{L} = I_3 r \vec{e}_z$

(160) d.h. $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

Kräftefreie Rotation eines starren Körpers um körperfeste Achsen ist nur um eine der Hauptträgheitsachsen möglich.



nicht möglich



möglich

- Ist eine solche Rotation auch stabil gegenüber kleinen Störungen?

Stabilitätsanalyse $\hat{=}$ Linearisierung

(i) Drehung um $\vec{e}_x$ + kleine Abweichung

$$(170) \quad p = p_0 + \Delta p \quad \varphi = \Delta \varphi \quad r = \Delta r$$

betrachten Euler Gleichungen (ohne äußere Kraft, d.h. $\vec{M} = 0$) in 1. Ordnung in $\Delta p, \Delta \varphi, \Delta r$

$$I_1 \Delta \dot{p} = 0 \quad \Delta p = \text{const}$$

$$(171) \quad I_2 \Delta \dot{\varphi} + (I_1 - I_3) p_0 \Delta r = 0$$

$$I_3 \Delta \dot{r} + (I_2 - I_1) p_0 \Delta \varphi = 0$$

Nochmaligen Differenzieren der letzten beiden Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned} I_2 \Delta \ddot{\varphi} + (I_1 - I_3) p_0 \Delta \ddot{r} &= \\ &= I_2 \Delta \ddot{\varphi} - \frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_1)}{I_3} p_0^2 \Delta \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 \Delta \ddot{r} + (I_2 - I_1) p_0 \Delta \ddot{\varphi} &= \\ &= I_3 \Delta \ddot{r} - \frac{(I_2 - I_1)(I_1 - I_3)}{I_2} p_0^2 \Delta r = 0 \end{aligned}$$

mit

$$(172) \quad D_p^2 \equiv \frac{p_0^2 (I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}$$

folgen zwei DGL 2. Ordnung

$$\Delta \ddot{q} + D_p^2 \Delta q = 0$$

$$\Delta \ddot{r} + D_p^2 \Delta r = 0$$

Schwingungslösung (kein exponentielles Wachstum) d.h. stabil

(173)
für

$$D_p^2 > 0$$

$$I_1 > I_3$$

und

$$I_1 > I_2$$

$$I_1 < I_3$$

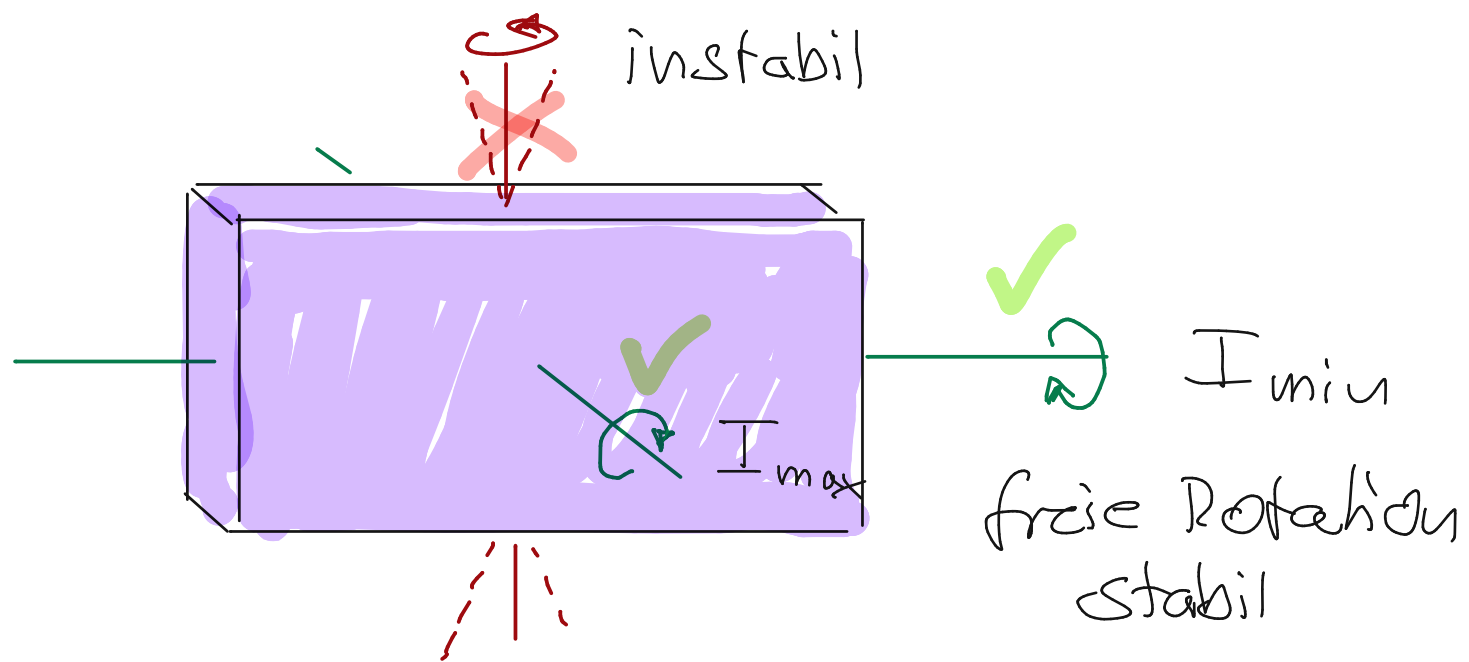
und

$$I_1 < I_2$$

analoge Überlegungen gelten für

(ii), (iii) Rotationen um $\vec{e}_y$ oder $\vec{e}_z$

Ein kräftefreier starrer Körper kann stabil nur um die Hauptträgheitsachsen mit dem größten oder dem kleinsten Hauptträgheitsmoment rotieren.



(D) Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Der Fall, daß zwei Hauptträgheitsmomente gleich groß sind, man spricht vom symmetrischen Kreisel, soll gesondert diskutiert werden

$$(174) \quad I_1 = I_2 \neq I_3$$

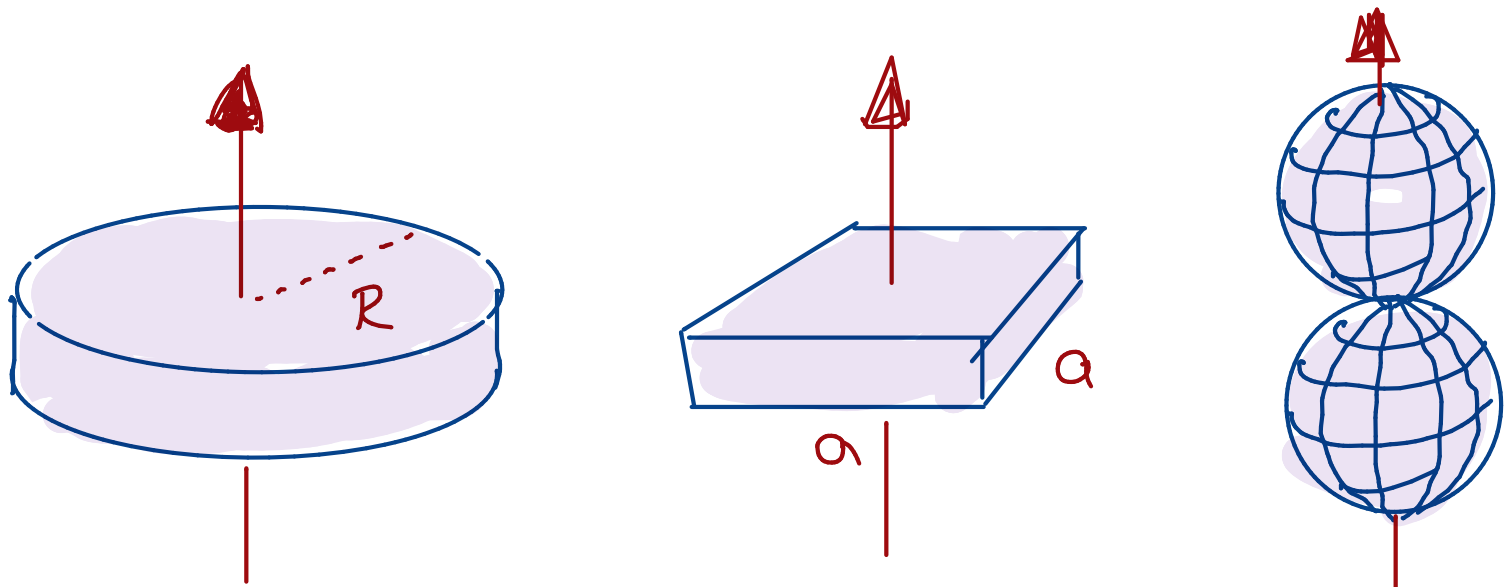
dann gilt

$$(175) \quad D_p^2 = D_q^2 = D_r^2 = 0$$

↪ $\vec{\omega}$ Achse nicht stabil im körperfesten System

Die ausgezeichnete Körperachse heißt Figurenachse

Bspl



Kräftefreiheit im (konstanten) Schwerfeld kann durch Unterstützung (Fixierung) des Schwerpunktes erzielt werden:

$$(176) \quad \vec{M} = \sum_j \vec{r}_j m_j \times \vec{g} = M (\vec{R} \times \vec{g}) = 0$$

da $\vec{R} = 0$

Euler Gleichungen: $(I_2 = I_1)$

$$I_1 \dot{p} + (I_3 - I_1) q r = 0$$

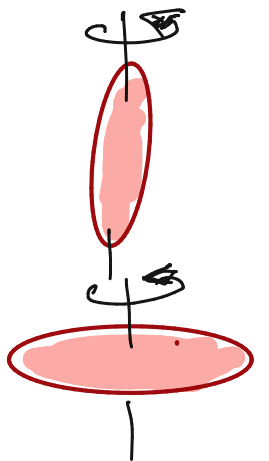
$$(177) \quad I_1 \dot{q} + (I_1 - I_3) r p = 0$$

$$I_3 \dot{r} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{r = r_0 = \text{konst}}} \quad (178)$$

OBdA $r_0 > 0$ (Wahl der Achsenorientierung)

$$(178) \quad \Omega \equiv \frac{I_1 - I_3}{I_1} r_0 \quad \begin{cases} > 0 & I_1 = I_2 > I_3 \\ < 0 & I_1 = I_2 < I_3 \end{cases}$$



$$\dot{p} - \Omega q = 0$$

$$\dot{q} + \Omega p = 0$$

$$\ddot{p} + \Omega^2 p = 0$$

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = 0$$

Schwingung!

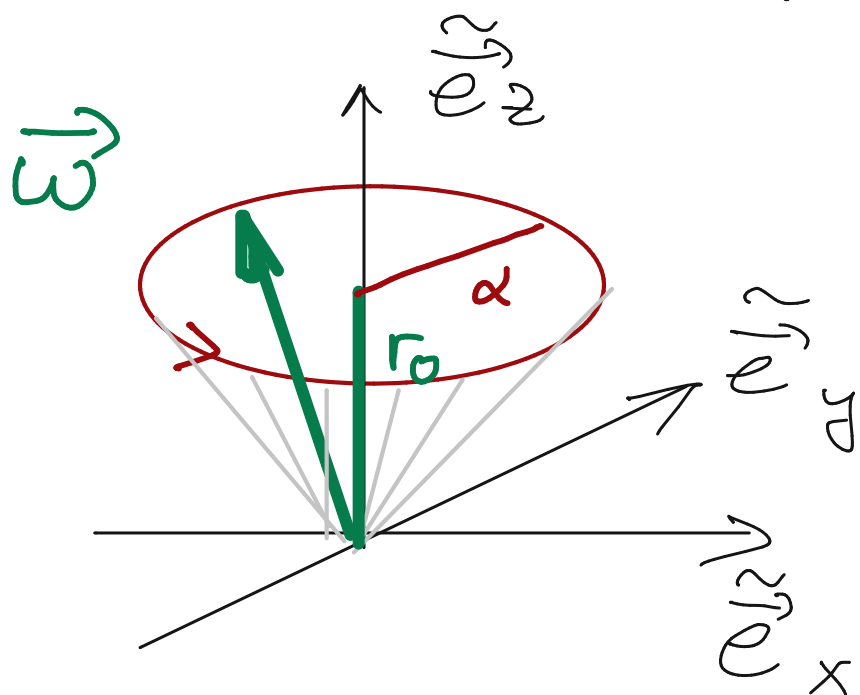
$$\Rightarrow \begin{aligned} (179) \quad & \underline{\underline{p = \alpha \sin(\omega t + \beta)}} \\ & \underline{\underline{q = \alpha \cos(\omega t + \beta)}} \end{aligned}$$

α, β konstant

Konsequenzen

- (i) Die Projektion von $\vec{\omega}$ auf die Figuren-
achse ($= r$) ist konstant.
- (ii) $\omega = |\vec{\omega}| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{\alpha^2 + r_0^2}$
 $= \text{konst}$
D.h. der Betrag der Winkelgeschwin-
digkeit ist konstant.
- (iii) Die Projektion von $\vec{\omega}$ in die $(\tilde{x}, \tilde{y})$ -
Ebene des körperfesten Bezugssystems
ist ein Kreis vom Radius α .

Bewegung eines symmetrischen Kreisel in
körperfestem Bezugssystem!



Polkegel

$$\tan \gamma = \frac{\alpha}{r_0} \quad (180)$$

γ : Öffnungswinkel

- bisher: Diskussion im körperfesten Bezugssystem
- jetzt: raumfestes Bezugssystem

Kräftefreiheit: $\vec{L} = \text{konst}$ wählen $\vec{L} = L \vec{e}_z$

(178) $\rightarrow$ und (155)

$$p = \alpha \sin(\Omega t + \beta) = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi$$

$$(181) \quad q = \alpha \cos(\Omega t + \beta) = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi$$

$$r = r_0 = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \varphi^0$$

$$\text{man ist } \vec{e}_z = \underbrace{\sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_x}_{\text{orange}} + \underbrace{\sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_y}_{\text{green}} + \underbrace{\cos \vartheta \vec{e}_z}_{\text{purple}}$$

d.h.

$$\begin{aligned} L_{\vec{x}} &\equiv I_{\perp} p = I_{\perp} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi + I_{\perp} \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ &\stackrel{!}{=} \underline{L \sin \vartheta \sin \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\vec{y}} &\equiv I_{\perp} q = I_{\perp} \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi - I_{\perp} \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ (182) \quad &\stackrel{!}{=} \underline{L \sin \vartheta \cos \varphi} \end{aligned}$$

$$L_z \equiv I_3 \dot{\varphi} = I_3 \dot{\varphi} \cos \vartheta + I_3 \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$\stackrel{!}{=} \underline{L \cos \vartheta}$$

aus (182) a, b $\Rightarrow$ Lösung nur möglich für $\dot{\vartheta} = 0$

$$(183) \quad \underline{\vartheta = \vartheta_0 = \text{konst}} \quad \text{und} \quad \underline{\dot{\varphi} = \text{konst}}$$

D.h.

$$\alpha \sin(\Omega t + \beta) = \dot{\varphi} \sin \vartheta_0 \sin \varphi$$

$$(184) \quad \alpha \cos(\Omega t + \beta) = \dot{\varphi} \sin \vartheta_0 \cos \varphi$$

$$r_0 = \dot{\varphi} \cos \vartheta_0 + \dot{\varphi} \sin \vartheta_0 \cos \varphi$$

Division der ersten zwei Gleichungen liefert $(I_1 = I_2)$

$$\tan(\Omega t + \beta) = \tan \varphi$$

$$(185) \quad \varphi = \Omega t + \beta = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \dot{\varphi} t + \beta$$

sowie

$$(186) \quad \dot{\varphi} = \frac{\alpha}{\sin \vartheta_0} \quad \varphi = \frac{\alpha t}{\sin \vartheta_0} + \varphi_0$$

Ferner folgt aus (184) c

$$(187) \quad r_0 = \frac{\alpha}{\sin \vartheta_0} \cos \vartheta_0 + \dot{\varphi}$$

$$\tan \vartheta_0 = \frac{\alpha I_1}{r_0 I_3}$$

Wir haben 4 unabhängige Konstanten

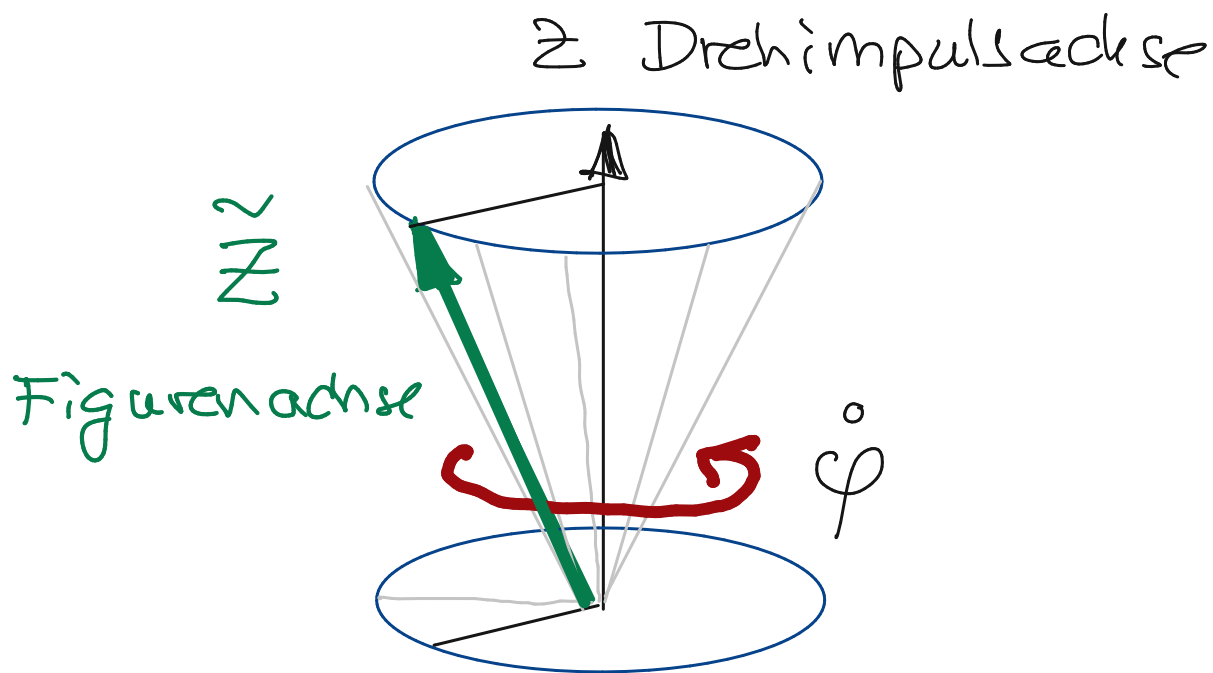
$$\alpha, \beta, \varphi_0, r_0$$

Diskussion der Lösung

- (i) ϑ : Winkel zwischen raum fester z -Achse $\hat{=}$ Drehimpuls
und körperfester $\tilde{z}$ -Achse $\hat{=}$ Figurenachse

Figurenachse bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha}{\sin \vartheta_0} \quad \text{um Drehimpulsachse}$$



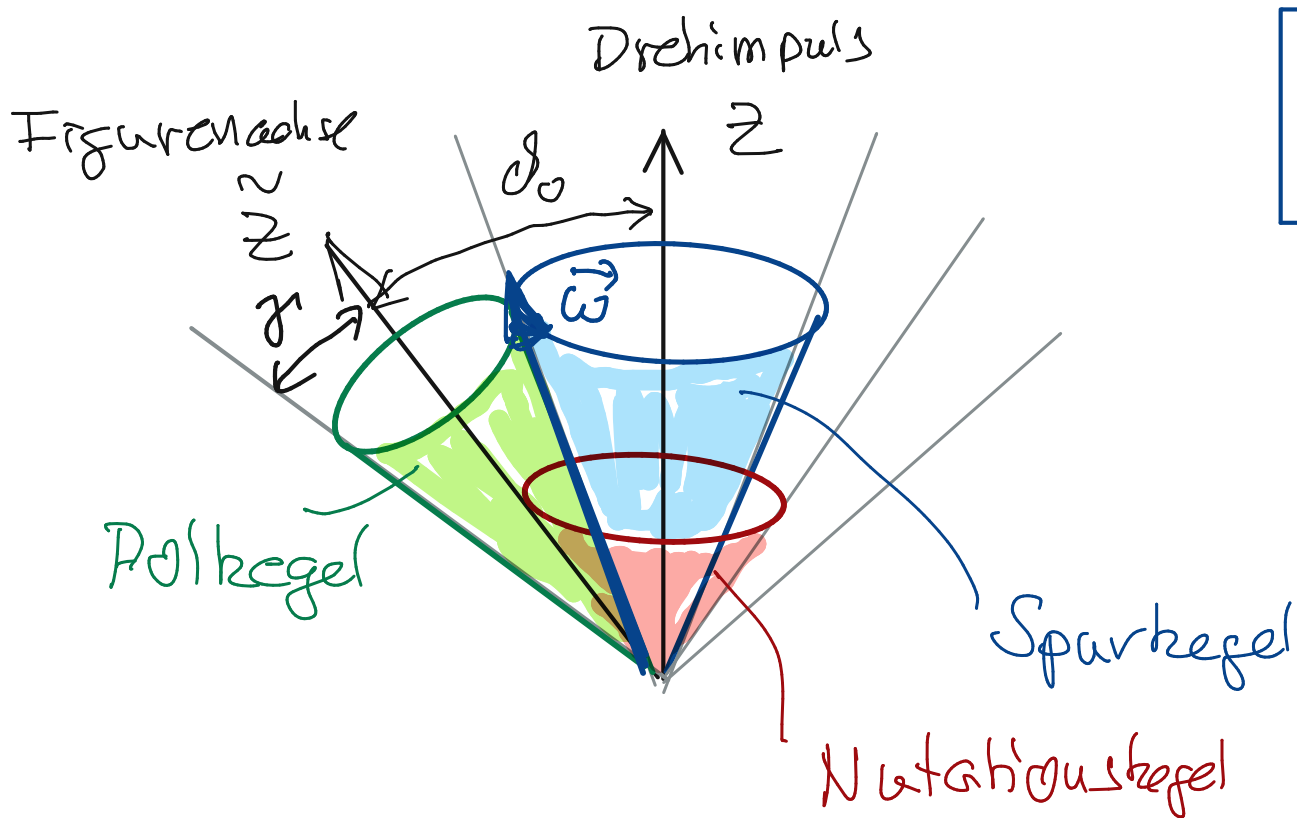
- (ii) $\dot{\varphi} = \Omega$ Winkelgeschwindigkeit mit der sich der Körper um die $\tilde{z}$ -Achse bewegt

$$(iii) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \underbrace{\dot{\vartheta}}_{\dot{\gamma}} \vec{e}_\kappa + \dot{\psi} \vec{e}_z = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\psi} \vec{e}_z$$

Winkelgeschwindigkeit ist Vektorsumme aus

$\dot{\varphi} \vec{e}_z$ (Rotation um Drehimpulsachse)

$\dot{\psi} \vec{e}_z$ (Rotation um Figurenachse)



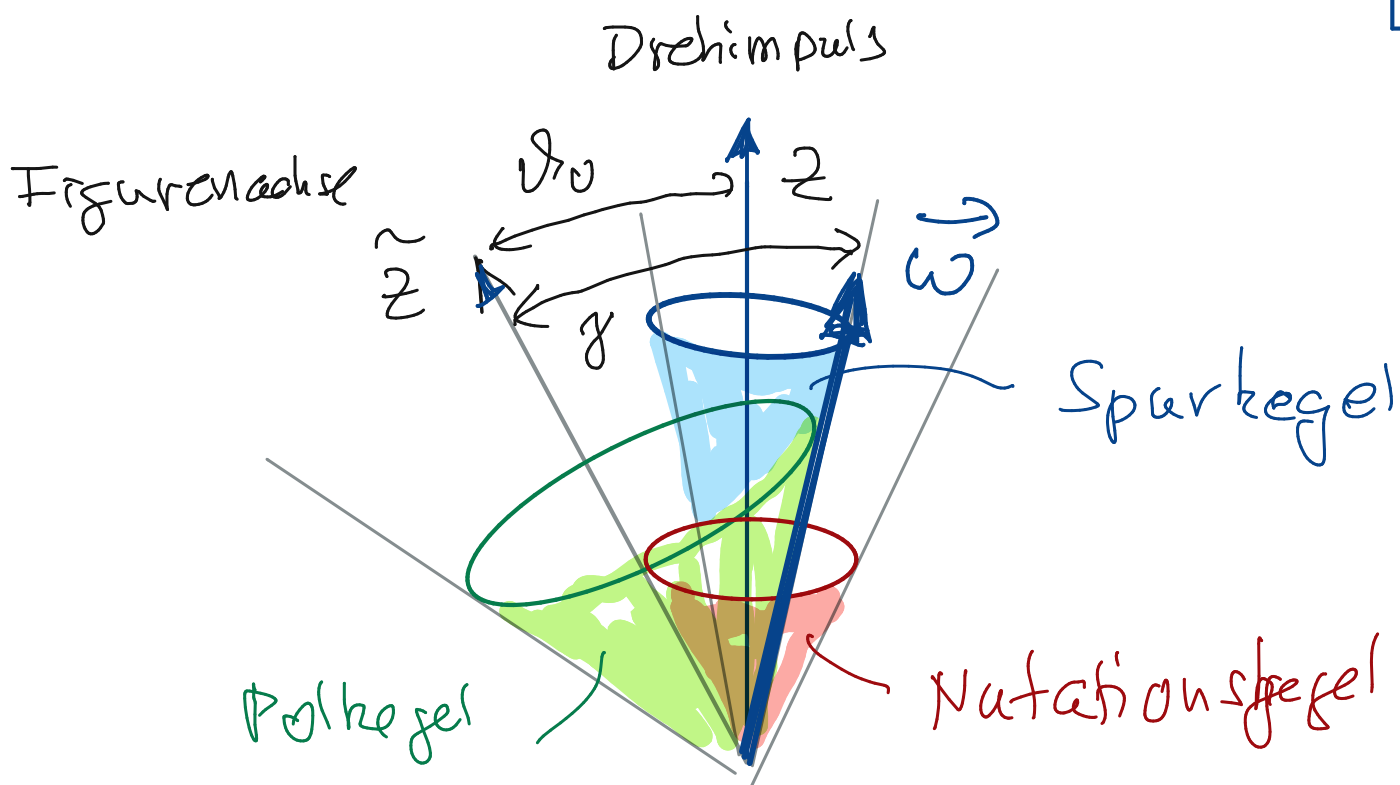
$$I_1 = I_2 > I_3$$

$$\tan \delta_0 > \tan \gamma$$

$$\tan \gamma = \frac{\alpha}{r_0} \quad \tan \delta_0 = \frac{\alpha}{r_0} \frac{I_1}{I_3}$$

$$I_1 = I_2 < I_3$$

$$\tan \delta_0 < \tan \gamma$$



Die Bewegung des Kreisel entspricht dem Abrollen des Polkegels auf dem Spurkegel

(E) Lagrangefunktion des Kreisels

Die geeigneten verallgemeinerten Koordinaten des Kreisels sind die Eulerwinkel

$$\begin{aligned}
 T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} (I_1 \dot{\varphi}^2 + I_2 \dot{\vartheta}^2 + I_3 \dot{\psi}^2) \\
 (188) \quad &= \frac{1}{2} \left[I_1 (\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi)^2 \right. \\
 &\quad + I_2 (\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi)^2 \\
 &\quad \left. + I_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 \right]
 \end{aligned}$$

kräftefreier Krieseel $V = 0$

$$(189) \quad L = T_R$$

kräftefreier symmetrischer Krieseel $I_1 = I_2$

$$(190) \quad L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2$$

Zyklische Variablen: φ, ψ

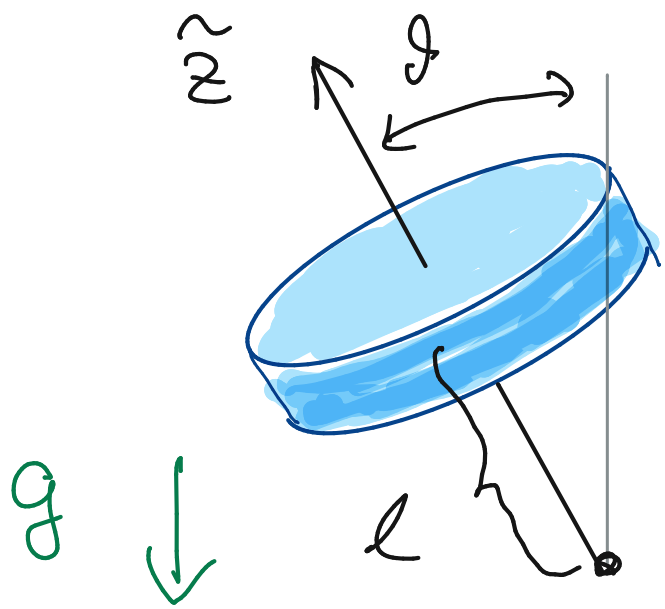
$$(191) \quad p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_1 \sin^2 \vartheta + I_3 \cos^2 \vartheta) \dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \vartheta = \text{konst}$$

$$(192) \quad p_{\psi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) = \text{konst}$$

(F) Schwerer symmetrischer Kreisel

Nun wollen wir eine externe Schwerkraft zulassen
Unterstützung nicht im Schwerpunkt

$$(193) \quad \vec{M} \neq 0 \quad \text{Drehmoment}$$



Steiner:

$$I_1' = I_2' = I_1 + M l^2$$

Gesamtmasse $\uparrow$

Lagrangian:

$$L = \frac{1}{2} I_1' (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2 - M g l \sin \vartheta$$

(194)

auch hier φ, ψ zyklisch

$\Rightarrow$ Erhaltungsgrößen

$$(195) \quad P_{\varphi} = (I_1' \sin^2 \vartheta + I_3 \cos^2 \vartheta) \dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \vartheta$$

$$(196) \quad P_{\psi} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)$$

$$(197) \quad E = \frac{1}{2} I_1' (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2 + M g l \cos \vartheta$$

$$\Rightarrow (198) \quad \dot{\varphi} = \frac{P_{\varphi} - P_{\psi} \cos \vartheta}{I_1' \sin^2 \vartheta}$$

$$(199) \quad \dot{\psi} = \frac{P_{\psi}}{I_3} - \dot{\varphi} \cos \vartheta$$

d.h. einzig verbleibende Variable

$$\vartheta = \vartheta(t)$$

Einsetzen von $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ (198, 199) in E (197) liefert:

$$(200) \quad \frac{1}{2} I_1' \dot{\vartheta}^2 + V_{\text{eff}}(\vartheta) = E' = \text{konst}$$

(201) mit

$$E' = E - \frac{P_\varphi^2}{2I_3} - Mge$$

(202) und

$$V_{\text{eff}}(\vartheta) = \frac{(P_\varphi - P_\varphi \cos \vartheta)^2}{2I_1' \sin^2 \vartheta} - Mge(1 - \cos \vartheta)$$

effektives, konservatives 1-dimensionales
Problem

→ Nutationsbewegung