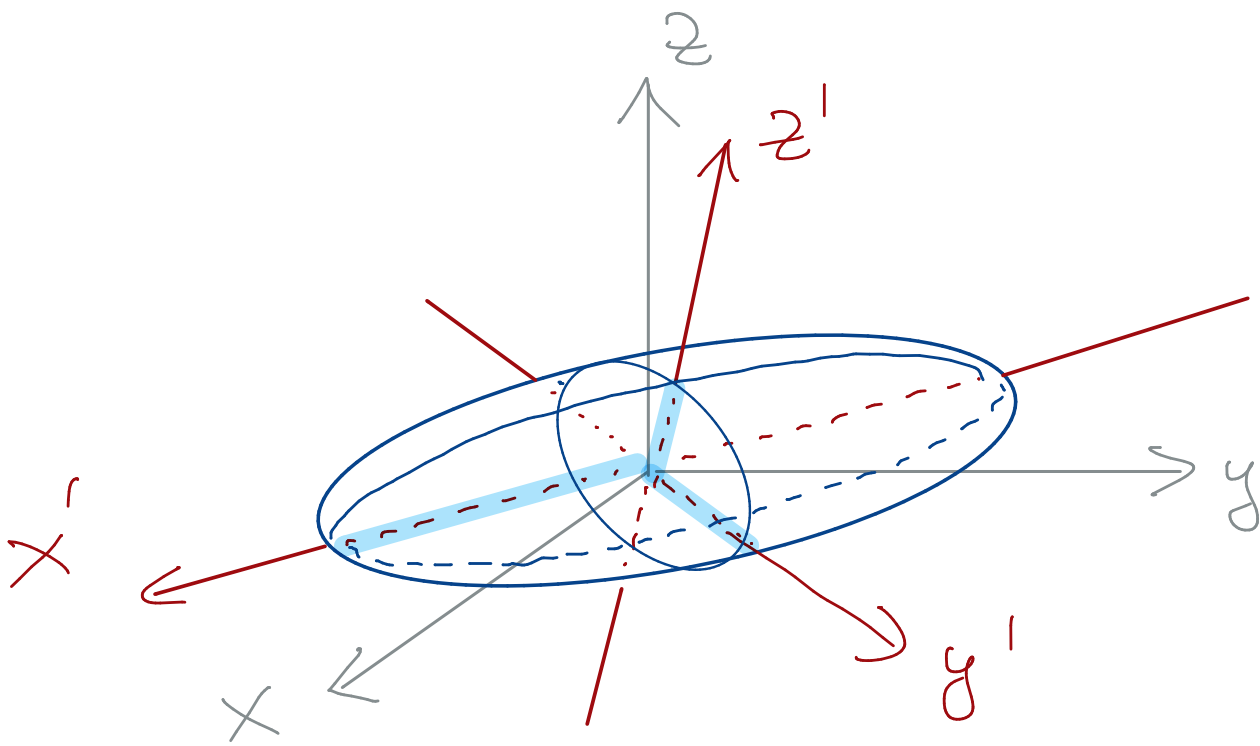


Der Trägheitstensor kann geometrisch durch einen Ellipsoiden, dem Trägheitellipsoid, veranschaulicht werden

$$(122) \quad 1 = J_{mn} x_m x_n = J_{11} x^2 + J_{22} y^2 + J_{33} z^2 + 2J_{12} xy + 2J_{13} xz + 2J_{23} yz$$

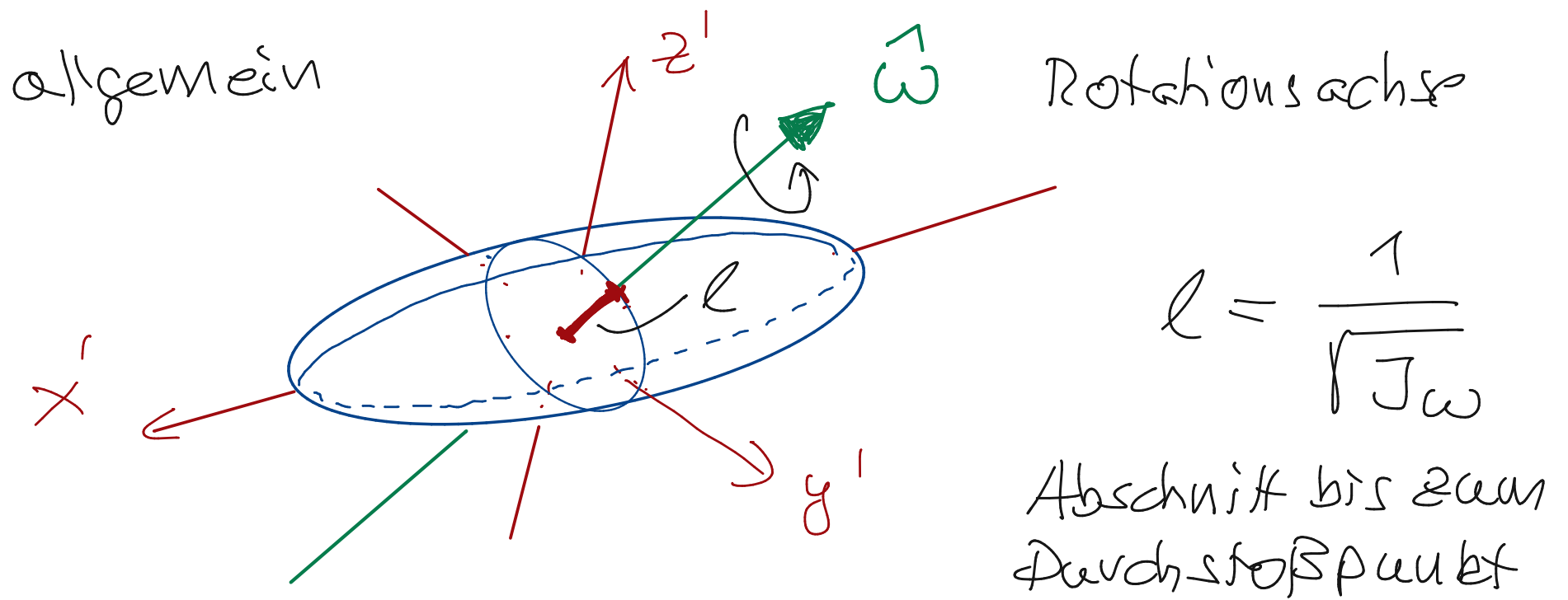


Im Hauptachsensystem (x', y', z')

$$(123) \quad 1 = I_1 x'^2 + I_2 y'^2 + I_3 z'^2 = \frac{x'^2}{\sqrt{\frac{1}{I_1}}^2} + \frac{y'^2}{\sqrt{\frac{1}{I_2}}^2} + \frac{z'^2}{\sqrt{\frac{1}{I_3}}^2}$$

Hauptachsenabschnitte haben die Längen

$$(124) \quad \boxed{l_n = \frac{1}{\sqrt{I_n}}} \quad n=1,2,3$$



Die Rotationsenergie kann auch in der Form

(125)

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \vec{\omega}$$

geschrieben werden

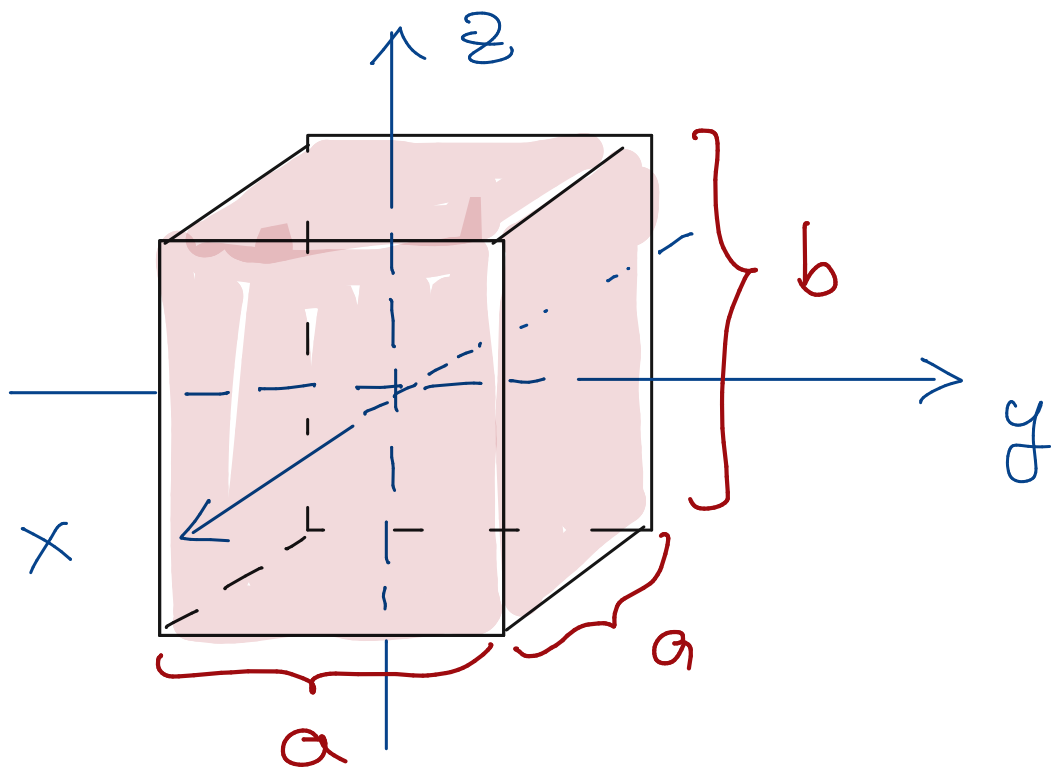
$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$$

Die Hauptträgheitsmomente I_j sind Eigenwerte der positiv semidefiniten Matrix $\underline{\underline{J}}$. Die zugehörigen Eigenvektoren definieren die Hauptträgheitsachsen. Falls $I_i \neq I_j$ sind die Eigenvektoren orthogonal; falls $I_i = I_j$ können sie orthogonal gewählt werden.

Beispiel:

(i) Quader

Ursprung =
Schwerpunkt



$$I_{zz} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \rho (x^2 + y^2) dz dy dx$$

$$= \rho b a \left[\frac{1}{3} x^3 \Big|_{-a/2}^{a/2} + \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-a/2}^{a/2} \right]$$

$$= \rho b a \frac{2}{3} 2 \left(\frac{a}{2} \right)^3 = \underline{\underline{\frac{\rho b a^4}{6}}}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \rho (y^2 + z^2) dz dy dx$$

(Symmetrie)

$$= \rho a b \left[\frac{y^3}{3} \Big|_{-a/2}^{a/2} + \frac{z^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} \right]$$

$$= \underline{\underline{\rho \frac{a^2 b}{12} (a^2 + b^2)}}$$

antisymm.
Funktion
+ symm.
Intervall

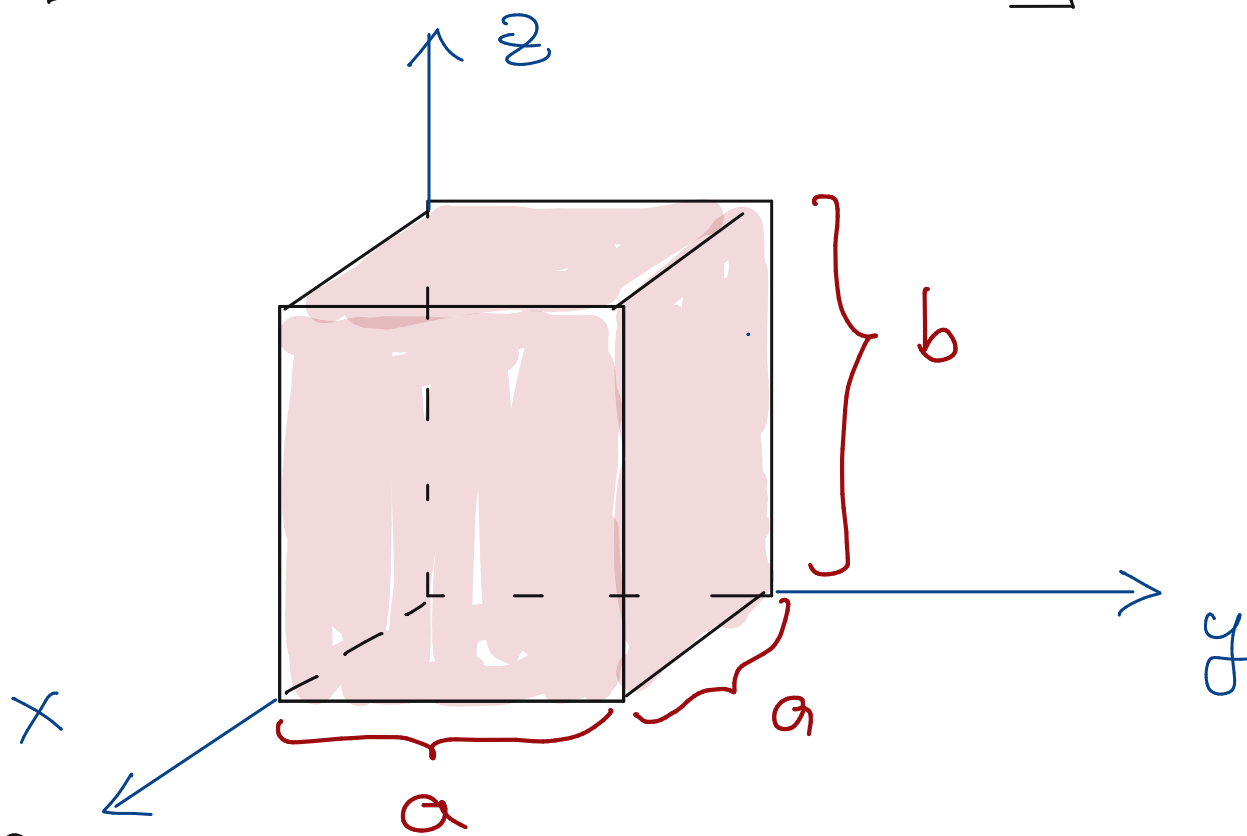
$$I_{xy} = \rho \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} (-xy) dz dy dx = \underline{\underline{0}}$$

analog für J_{xz} , J_{yz} ; d.h.

$$(126) \quad \underline{\underline{J_0}} = \frac{\rho a^2 b}{6} \begin{bmatrix} \frac{a^2+b^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2+b^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

(ii) Quader

Ursprung =
Eckpunkt



$$J_{zz} = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^b dz \rho (x^2 + y^2) = \underline{\underline{\frac{2}{3} \rho a^4 b}}$$

$$J_{xx} = J_{yy} = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^b dz \rho (y^2 + z^2) = \underline{\underline{\frac{1}{3} \rho a^2 b (a^2 + b^2)}}$$

$$J_{xy} = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^b dz (-xy) = \underline{\underline{-\frac{\rho a^2 b}{4} a^2 \neq 0}}$$

$$J_{xz} = J_{yz} = \int_0^a \int_0^a \int_0^b dz (-xz) = \underline{\underline{-\frac{8a^2b}{4} ab}}$$

D.h.

$$\underline{\underline{J}} = \frac{8a^2b}{6} \begin{bmatrix} 2(a^2+b^2) & -\frac{3}{2}a^2 & -\frac{3}{2}ab \\ -\frac{3}{2}a^2 & 2(a^2+b^2) & -\frac{3}{2}ab \\ -\frac{3}{2}ab & -\frac{3}{2}ab & 4a^2 \end{bmatrix}$$

(127)

$$\text{Spur}(\underline{\underline{J}}) = \frac{2}{3} 8a^2b (2a^2+b^2)$$

$$\text{Spur}(\underline{\underline{J}}_0) = \frac{8a^2b}{6} (2a^2+b^2)$$

EW sind
verschieden!

Hauptträgheitsmomente hängen vom Bezugspunkt ab!

II.3 Satz von Steiner

Wie ändert sich der Trägheitstensor bei Koordinatentransformationen?

- Rotation $\Rightarrow$ folgt sofort aus Tensor-eigenschaft

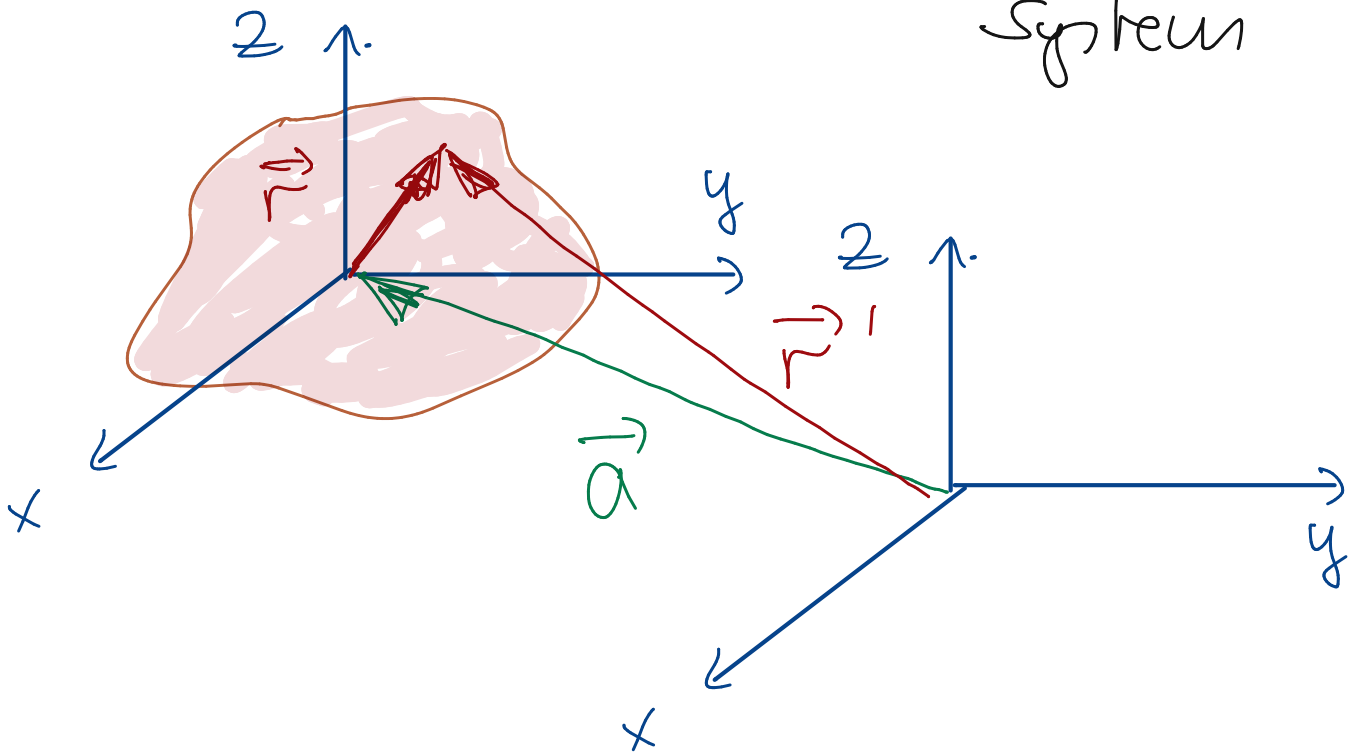
R - Rotationsmatrix

$$(128) \quad \underline{\underline{J}} \rightarrow \underline{\underline{R}} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{R}}^{-1} \quad \checkmark$$

• Translation ?

• $\vec{r}$ im Schwerpunktsystem

• $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$ in einem anderen System



$$J_{\mu\nu}' = \int d^3r' g(\vec{r}') [r'^2 \delta_{\mu\nu} - x_{\mu}' x_{\nu}']$$

$$= \int d^3r g(\vec{r}) \left[(r^2 + a^2 + 2\vec{r} \cdot \vec{a}) \delta_{\mu\nu} - (x_{\mu} + a_{\mu})(x_{\nu} + a_{\nu}) \right]$$

$$= \int d^3r g(\vec{r}) [r^2 \delta_{\mu\nu} - x_{\mu} x_{\nu}]$$

$$+ \int d^3r g(\vec{r}) [a^2 \delta_{\mu\nu} - a_{\mu} a_{\nu}]$$

$$+ \int d^3V \rho(\vec{r}) \left[2(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3) \delta_{\mu\nu} - x_\mu a_\nu - x_\nu a_\mu \right]$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$$

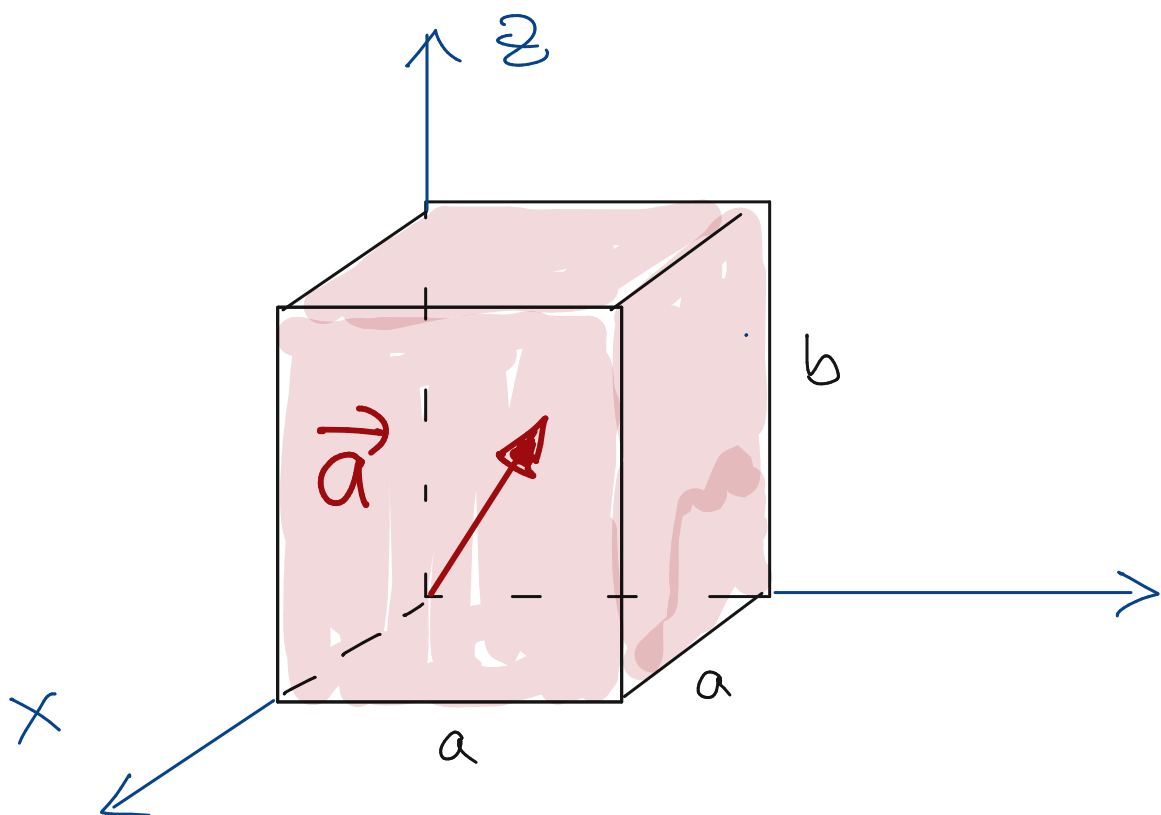
da x_μ im SP-System!

$\Rightarrow$

$$(129) \quad J'_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}^{SP} + M(a^2 \delta_{\mu\nu} - a_\mu a_\nu)$$

Satz von Steiner

Beispiel (i) Quader mit Ursprung = Eckpunkt



$$\vec{a} = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$$

$$a^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4} (2a^2 + b^2)$$

$$I = \rho a^2 b$$

$$\Rightarrow J'_{xx} = J_{xx} + \rho a^2 b \left(\frac{1}{4} (2a^2 + b^2) - \frac{a^2}{4} \right)$$

$$= J_{xx} + \rho \frac{a^2 b}{4} (a^2 + b^2) = \rho a^2 b (a^2 + b^2) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)$$

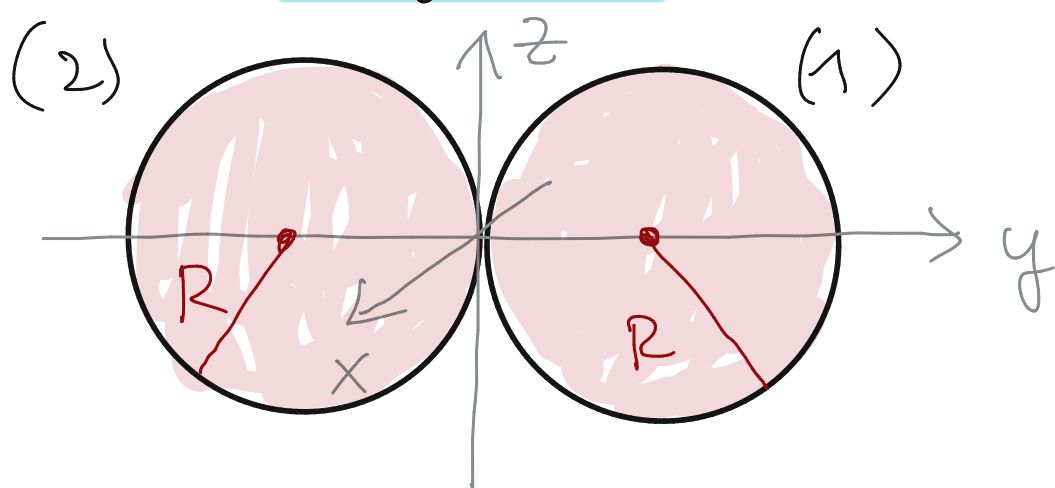
$$\text{d.h. } J_{xx}' = \rho \frac{a^2 b}{3} (a^2 + b^2) \quad \checkmark \quad \text{siehe (127)}$$

$$\begin{aligned} J_{zz}' &= J_{zz} + \rho a^2 b \left(\frac{1}{4} (2a^2 + b^2) - \frac{b^2}{4} \right) \\ &= J_{zz} + \rho \frac{a^2 b}{2} a^2 = \rho a^4 b \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \rho a^4 b \quad \checkmark \quad \text{siehe (127)} \end{aligned}$$

$$J_{xy}' = 0 - \rho a^2 b \frac{a^2}{4} = -\rho \frac{a^4 b}{4} \quad \checkmark$$

$$J_{xz}' = 0 - \rho a^2 b \frac{ab}{4} = -\rho \frac{a^3 b^2}{4} \quad \checkmark$$

(ii) Handel aus zwei sich berührenden Kugeln



Zusammengesetzter Körper

$$J_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}^{(1)} + J_{\mu\nu}^{(2)}$$

- Trägheits tensor jeder der beiden Kugeln bzgl. des jeweiligen Schwerpunktes

$$J_{\mu\nu} = I_0 \delta_{\mu\nu}$$

- Verschiebungen $\vec{a}^{(1)} = (0, R, 0)$ $\vec{a}^{(2)} = (0, -R, 0)$

$$J_{\mu\nu}^{(1)} = I_0 \delta_{\mu\nu} + MR^2 (\delta_{\mu\nu} - \delta_{\mu 2} \delta_{\nu 2})$$

$$J_{\mu\nu}^{(2)} = I_0 \delta_{\mu\nu} + MR^2 (\delta_{\mu\nu} - \delta_{\mu 2} \delta_{\nu 2})$$

$$\Rightarrow J_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2I_0 + 2MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2I_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2I_0 + 2MR^2 \end{pmatrix}$$

II.4 Drehimpuls des starren Körpers

Gesamt-Drehimpuls aller Massenpunkte des starren Körpers

$$(130) \quad \vec{L} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j$$

Wiederum

$$(131) \quad \begin{aligned} \vec{r}_j &= \vec{r}_0 + \vec{r}_j' \\ \dot{\vec{r}}_j &= \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_j' \end{aligned}$$

↑
körperfestes Bezugssystem

D.h.

$$(132) \quad \vec{L} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_j') + \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j' \times \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_j')$$

typischerweise zwei relevante Fälle

(a) $\vec{r}_0$ raumfest $\dot{\vec{r}}_0 = 0$ Kreisel
 O.B.d.A. $\vec{r}_0 = 0$

(b) $\nexists$ raumfester Punkt, dann $\vec{r}_0 = \vec{R}$ Schwerpunkt
 $\Rightarrow \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j' = 0$

in diesen Fällen:

$$(133) \quad \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j' \times \dot{\vec{r}}_0 = 0$$

und

$$(134) \quad \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_j') = 0$$

$\Rightarrow$

$$(135) \quad \vec{L} = \vec{r}_0 \times M \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_j')$$

(136)

$$\vec{L} = \vec{L}_{sp} + \vec{L}_{rot}$$

Drehimpuls des
Schwerpunktes

innerer Drehimpuls
des starren Körpers

Schauen wir uns $\vec{L}_{rot}$ genauer an:

$$\begin{aligned}\vec{L}_{rot} &= \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_j') \\ &= \sum_{j=1}^N m_j \left[r_j'^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_j' \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_j' \right]\end{aligned}$$

(137)

$$\vec{L}_{rot} = \underline{\underline{\mathbb{J}}} \cdot \vec{\omega}$$

Bew: $L_{rot \mu} = \sum_{j=1}^N m_j (r_j'^2 \omega_\mu - x_{j\nu} \omega_\nu x_{j\mu})$

$$(\underline{\underline{\mathbb{J}}} \cdot \vec{\omega})_\mu = \sum_{j=1}^N m_j (r_j'^2 \delta_{\mu\nu} - x_{j\nu} x_{j\mu}) \omega_\nu$$

□

mit Gl. (125) folgt dann auch

(138)

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_{rot} = \frac{1}{2} \vec{L}_{rot} \cdot \vec{\omega}$$