

d.h.

$$q_{j1} \rightarrow q_{j1} + \delta$$

Teilchen x, y, z

$$\frac{dh_s(q_{jm})}{ds} = \delta_{m1}$$

$$\Rightarrow I = \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{jm}} \quad \delta_{m1} = \sum_{j=1}^N m_j \dot{x}_j = P_x$$

Impuls in x -Richtung ist Erhaltungsgröße

II. Mechanik des starren Körpers

II.1 Modell des starren Körpers

und Kinematik

Def: Eine Menge von N Massenpunkten mit zeitlich konstanten ("starren") relativen Abständen heißt starrer Körper

holonome Zwangsbedingungen

$$(99) \quad |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 = a_{ij} \quad \forall i, j$$

Freiheitsgrade?

1 Massenpunkt



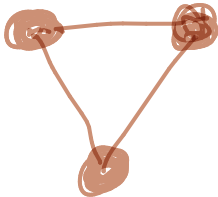
3 Freiheitsgrade

2 Massenpunkte



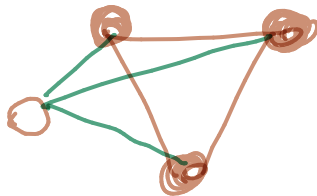
$6 - 1 = 5$ Freiheitsgrade

3 Massenpunkte



$9 - 3 = 6$ Freiheitsgrade

$N > 3$ MP.:



$6 + 3 - 3 = 6$ Freiheitsgrade

für einen starren Körper aus 3 oder mehr Massenpunkten gibt es nur 6 Freiheitsgrade

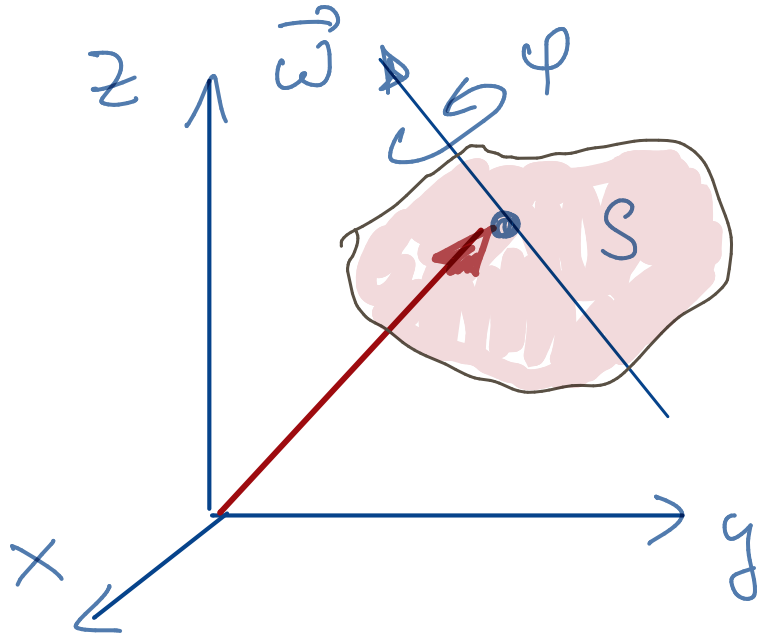
$\Rightarrow 3N - 6$ holonome Zwangsbedingungen

Bem: Definition des starren Körpers auf kontinuierliche Massenverteilung ausdehnbar

$$(100) \quad \sum_{i=1}^N m_i \rightarrow \int d^3\vec{r} \, \rho(\vec{r})$$

Bewegung eines starren Körpers durch 6 Freiheitsgrade festgelegt. J.A. wählt man!

- Translation eines körperfesten Punktes S (oft Schwerpunkt)
- Rotation um eine momentane Drehachse durch Punkt S



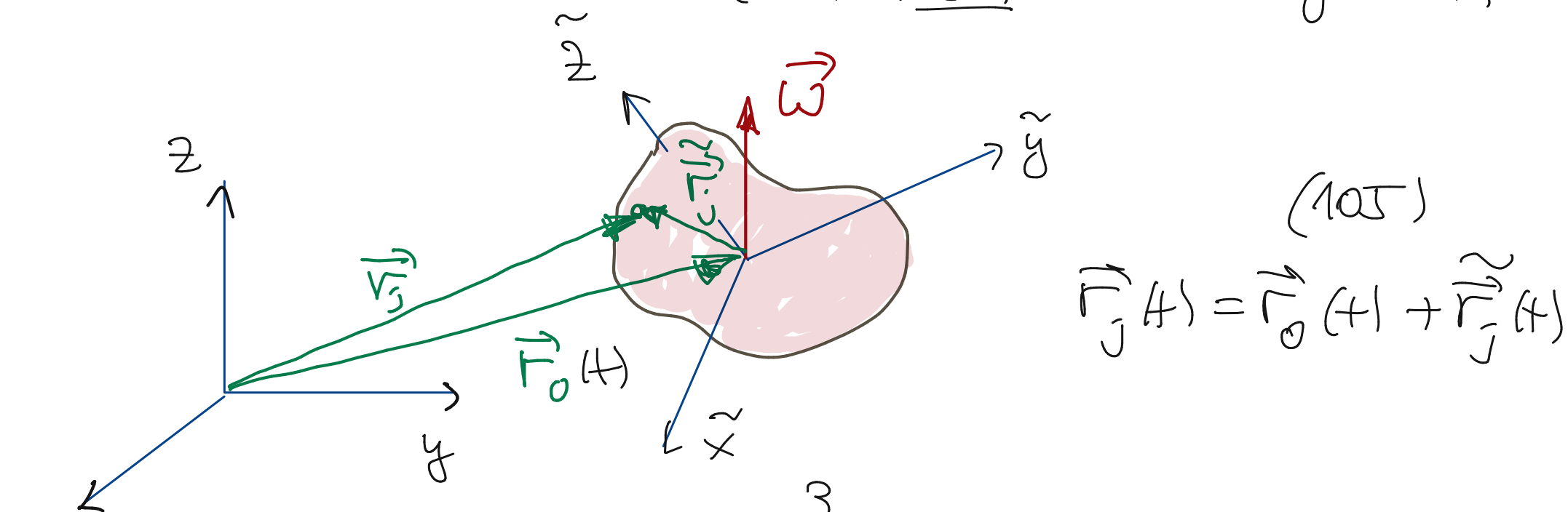
Wichtige Größen

- | | |
|-------------------------------|--|
| (101) <u>Gesamtmasse</u> | $M = \sum_j m_j = \int d^3r \rho(\vec{r})$ |
| (102) <u>Schwerpunkt</u> | $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{r}_j = \int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r})$ |
| (103) <u>Gesamtimpuls</u> | $\vec{P} = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j = \int d^3r \dot{\vec{r}} \rho(\vec{r})$ |
| (104) <u>Gesamtdrehimpuls</u> | $\vec{L} = \sum_j m_j (\vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j) = \int d^3r (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \rho(\vec{r})$ |

Wichtige Bezugssysteme

- Σ raumfestes Bezugssystem (i.d.R. Inertialsystem)

$\tilde{\Sigma}$: körperfestes Bezugssystem
(i.A. kein Inertialsystem)



$$(105) \quad \vec{r}_j(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_j^{\sim}(t)$$

$(x_{j\alpha})$ in Σ :
$$\vec{r}_j(t) = \sum_{k=1}^3 x_{jk}(t) \vec{e}_k$$

(107) in $\tilde{\Sigma}$:
$$\vec{r}_j^{\sim}(t) = \sum_{k=1}^3 \tilde{x}_{jk}(t) \vec{e}_k^{\sim}(t)$$

in beschleunigten Bezugssystemen (NGdP)

(108)
$$\frac{d}{dt} \Big|_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \Big|_{\tilde{\Sigma}} + \vec{\omega} \times \dots$$

Für einen fest mit dem starren Körper verbundenen Punkt gilt

$$\vec{r}_j^{\circ} = 0$$

d.h. (109)
$$\vec{r}_j^{\bullet} = \vec{r}_j^{\circ} + \vec{\omega} \times \vec{r}_j^{\sim}$$

II.2 kinetische Energie, Trägheitsdensor

kinet. Energie des Massenpunktes des starren Körpers

$$T = \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j (\vec{\omega} \times \vec{r}_j)^2 + \underbrace{\sum_j m_j (\vec{\omega} \times \vec{r}_j) \cdot \dot{\vec{r}}_0}_{=0}$$

(110)

$$= \sum_j m_j \vec{r}_j \cdot (\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{\omega})$$

Zwei relevante Fälle

(a) $\vec{r}_0$ raumfest Kreisel

$$\dot{\vec{r}}_0 = 0$$

(b) $\nexists$ raumfester Punkt des starren Körpers
dann oft

$$\vec{r}_0 = \vec{R} \Rightarrow \sum_j m_j \vec{r}_j = 0$$

$\Rightarrow$ 3. Term verschwindet

$$(111) \quad T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j (\vec{\omega} \times \vec{r}_j)^2$$

translatonischer
Anteil der kin.
Energie T_{trans}

Rotationsenergie
 T_{rot}

Es gilt d.h. $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

$$\begin{aligned}
 (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 &= \omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 \\
 &= (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2) \\
 &\quad - (\omega_1 \tilde{x}_1 + \omega_2 \tilde{x}_2 + \omega_3 \tilde{x}_3)^2 \\
 (112) \quad &= \omega_1^2 (\tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2) + \omega_2^2 (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_3^2) + \omega_3^2 (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2) \\
 &\quad - \omega_1 \omega_2 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - \omega_2 \omega_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_1 \\
 &\quad - \omega_1 \omega_3 \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 - \omega_3 \omega_1 \tilde{x}_3 \tilde{x}_1 \\
 &\quad - \omega_2 \omega_3 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 - \omega_3 \omega_2 \tilde{x}_3 \tilde{x}_2
 \end{aligned}$$

bilinear in ω_m, ω_n , d.h.

$$(113) \quad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{m,n} J_{mn} \omega_m \omega_n$$

Rotations-
energie

wobei

$$\begin{aligned}
 (114) \quad J_{mn} &= \sum_{j=1}^N m_j (\tilde{r}_j^2 \delta_{mn} - \tilde{x}_{jm} \tilde{x}_{jn}) \\
 &= \int d^3r \rho(\vec{r}) (\tilde{r}^2 \delta_{mn} - \tilde{x}_m \tilde{x}_n)
 \end{aligned}$$

Trägheitstensor

Eigenschaften des Trägheitstensors

Def: Unter einem Tensor k-ter Stufe in einem n -dimensionalen Raum versteht man ein n^k Tupel von Zahlen

$$(115) \quad \overline{T}_{i_1, i_2, \dots, i_k} \quad i_\mu \in 1, 2, 3, \dots, n$$

das sich bei Koordinatentransformationen

$$x_j \rightarrow x_{j'} = A_{j'i} x_i = \sum_{i=1}^n A_{j'i} x_i$$

wie die Koordinaten transformiert, d.h.,

$$(116) \quad \overline{T}_{j_1', j_2', \dots, j_k'} = A_{j_1' i_1} A_{j_2' i_2} \dots A_{j_k' i_k} \cdot \overline{T}_{i_1 i_2 \dots i_k}$$

Def: Pseudotensor: zusätzlicher Faktor
 $\text{sgn}(A_{j'i})$ = Vorzeichen der Determinante von $A_{j'i}$

• Skalar = Tensor 0-ter Stufe

• phys. Vektor (Kraft) = Tensor 1-ter Stufe

• Kreuzprodukt zweier physikalischer Vektoren
= Pseudotensor 1-ter Stufe

Trägheitstensor = Tensor 2'er Stufe

Bew.: Rotationsenergie bleibt dieselbe unter festen (!)
Rotation des körperfesten Bezugssystems $\tilde{\Sigma}$

$$T_{\text{Rot}}^! = \frac{1}{2} J_{m'n'} \omega_{m'} \omega_{n'} = \frac{1}{2} J_{m'n'} A_{m'm} A_{n'n} \omega_m \omega_n$$

$$\stackrel{!}{=} T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} J_{mn} \omega_m \omega_n$$

d.h. $J_{mn} = A_{m'm} A_{n'n} J_{m'n'} \quad \square$

► Der Trägheitstensor ist reell und symmetrisch

(117) $J_{mn}^* = J_{mn} = J_{nm}$

Jede reelle und symmetrische 3×3 Matrix lässt sich durch eine spezielle orthogonale Transformation

$$\underline{\underline{R}} \in \text{SO}(3)$$

auf Diagonalform bringen

(118) $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{R}}^{-1} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{R}}$ ist eine Drehung!

Satz: $\exists$ ein körperfestes kartesisches Koordinatensystem in dem der Trägheitstensor diagonal ist. Die Diagonalelemente heißen Hauptträgheitsmomente, die zugehörigen Achsenrichtungen heißen Hauptträgheitsachsen.

Die Hauptträgheitsmomente sind nicht negativ

$$(119) \quad I_j \geq 0$$

und es gilt

$$(120) \quad I_1 + I_2 \geq I_3 \quad + \text{zyklische Vertauschung}$$

Bew:

• 1. Teil $\rightarrow$ Algebra

$$\begin{aligned} \bullet I_1 &= \int d^3 r' g(r') (x'^2 + y'^2 + z'^2 - x'^2) \\ &= \int d^3 r' g(r') (y'^2 + z'^2) \geq 0 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

(x' in $\tilde{z}$
etc.)

$$\begin{aligned} \bullet I_1 + I_2 &= \int d^3 r' g(r') (y'^2 + z'^2 + x'^2 + z'^2) \\ &= \underbrace{\int d^3 r' g(r') (x'^2 + y'^2)}_{= I_3} + \underbrace{2 \int d^3 r' g(r') z'^2}_{\geq 0} \quad \square \end{aligned}$$

Def: $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$ asymmetrischer Körper

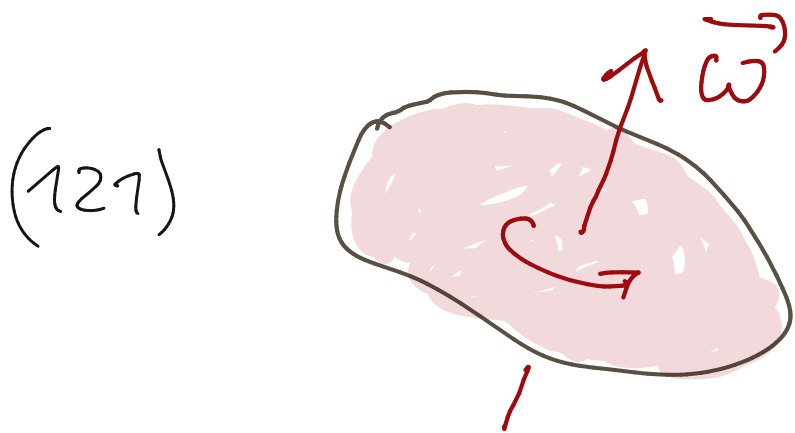
$I_1 = I_2 \neq I_3$ (+ analog) symmetrischer Körper

$I_1 = I_2 = I_3$ Kugelsymmetrie

Def: Die Größe

$$J_\omega \equiv J_{mn} \hat{\omega}_m \hat{\omega}_n \quad \text{mit } \hat{\omega}_m = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{e}_m}{|\vec{\omega}|}$$

heißt Trägheitsmoment bezgl. Rotation
um Achse $\hat{\omega} = \vec{\omega} / |\vec{\omega}|$



$$J_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_\omega \omega^2$$

Der Trägheitstensor ist additiv in Massenelementen

$\Rightarrow J$ ist additiv

