

$$\lambda_1 = -mR\omega \sin \omega t \dot{\varphi} + mR \cos \omega t \ddot{\varphi}$$

$$\lambda_2 = mR\omega \cos \omega t \dot{\varphi} + mR \sin \omega t \ddot{\varphi}$$

$\Rightarrow$ mit (59)

$$J_1 \ddot{\varphi} = -mR^2 \ddot{\varphi} \quad \text{da } J_1 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\ddot{\varphi} = 0}}$$

$$\underline{\underline{\dot{\varphi} = \tilde{\omega} t + \varphi_0}} \quad \text{ODER } \varphi_0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\underline{\ddot{x} = -R\omega \tilde{\omega} t \sin \omega t}}$$

$$\underline{\underline{\ddot{y} = R\omega \tilde{\omega} t \cos \omega t}}$$

I.6 Das Hamiltonsche Prinzip

d'Alembert Prinzip – differentielles Prinzip

Jetzt wollen wir ein Integralprinzip ableiten

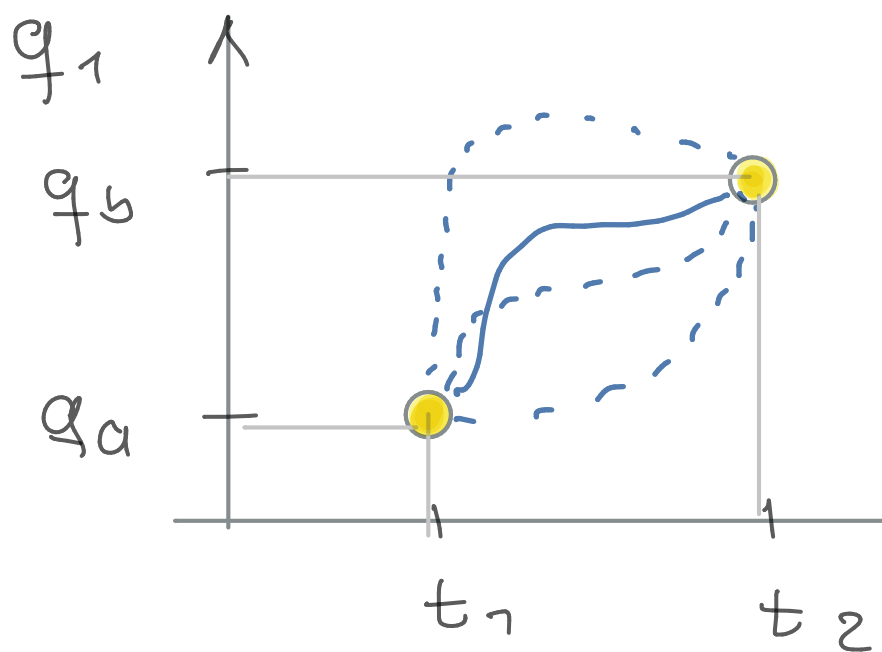
(A) Formulierung und Äquivalenz zu d'Alembert

Def: konfigurationsraum: f generalisierte Koordinaten
 $q_1, \dots, q_f$

Def.: Konfigurationsbahn $\underline{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t))$

Def.: Konkurrenzschar von Konfigurationsbahnen

$$(63) \quad M \equiv \{ \underline{q}(t) : \underline{q}(t_1) = \underline{q}_a \quad \underline{q}(t_2) = \underline{q}_b \}$$



Konkurrenzschar

- (i) alle Bahnen $q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t)$ haben gleiche Randpunktzeiten t_1, t_2
- (ii) M enthält alle Bahnen, die durch virtuelle Verrückungen zu allen Zeiten $t_1 < t < t_2$ auseinander hervorgehen
- (iii) $\delta \underline{q}(t_1) = \delta \underline{q}(t_2) = 0$ keine Verrückung an Randzeiten

Wirkungsfunktional

(64)

$$S[\underline{q}(t)] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t), t)$$

Hamilton'sches Prinzip

(holonome, konservative Systeme)

(65) Die Bewegung des Systems erfolgt so, daß die Wirkung für die tatsächliche Bahn extremal wird

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = 0$$

★ Beweis der Äquivalenz zum d'Alembert Prinzip

$$(66) \sum_{j=1}^N (m_j \ddot{\vec{r}}_j - \vec{K}_j) \cdot \delta \vec{r}_j = 0$$

Man ist:

$$\ddot{\vec{r}}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_j \cdot \delta \vec{r}_j) - \dot{\vec{r}}_j \cdot \delta \dot{\vec{r}}_j = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_j \cdot \delta \vec{r}_j) - \frac{1}{2} (\delta \dot{\vec{r}}_j)^2$$

d.h.:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^N (m_j \ddot{\vec{r}}_j - \vec{K}_j) \cdot \delta \vec{r}_j = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{j=1}^N m_j \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_j \cdot \delta \vec{r}_j) - \frac{m_j}{2} \delta \dot{\vec{r}}_j^2 - \vec{K}_j \cdot \delta \vec{r}_j \right] = 0$$

1. Term

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^N m_j \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_j \cdot \delta \vec{r}_j) = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \delta \vec{r}_j \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

$$\text{da } \delta \vec{r}_j(t_1) = \delta \vec{r}_j(t_2) = 0$$

Damit reduziert sich (66) auf

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^N \left(\underbrace{\frac{m_j}{2} \delta \dot{\vec{r}}_j^2}_{=\delta T} - \underline{\vec{K}_j} \cdot \delta \vec{r}_j \right) = 0$$

konservatives System

$$\sum_{j=1}^N \vec{K}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_{\ell=1}^f Q_{\ell} \delta q_{\ell} = - \sum_{\ell=1}^f \frac{\partial V}{\partial q_{\ell}} \delta q_{\ell} = -\delta V$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta (T - V) = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = 0 \quad \square$$

(B) Elemente der Variationsrechnung

Wir diskutieren dies am Beispiel einer Funktion einer Veränderlichen

- Konkurrenzschar M : Menge aller 2 mal differenzierbarer Funktionen $y(x)$ in $x_a \leq x \leq x_b$ mit $y(x_a) = y_a$ und $y(x_b) = y_b$

Def: Funktional: Abbildung $M \rightarrow \mathbb{R}$

$$(66) \quad I[y(x)] = \int_{x_a}^{x_b} f(y(x), y'(x), x)$$

mit f differenzierbar mit stetigen partiellen Ableitungen

Problem: wie folgt aus $\delta I = 0$
 $\Rightarrow y(x) = y_0(x) = ?$

Ansatz: konkurrenzschon parametrisiert
 durch Parameter α

$$(67) \quad y_\alpha(x) = y_0(x) + \delta_\alpha(x)$$

$$(68a) \text{ mit: } \delta_\alpha(x_1) = \delta_\alpha(x_2) = 0 \quad \forall \alpha \quad \delta \text{ verschwindet an Randpunkten}$$

$$(68b) \text{ und: } \delta_{\alpha=0}(x) = 0 \quad \forall x$$

mögliche Wahl

$$(69) \quad \delta_\alpha(x) = \alpha \gamma(x) \quad \gamma(x_1) = \gamma(x_2) = 0$$

$$\delta y = \underbrace{y_{\delta\alpha}(x)}_{\text{kleines } \delta\alpha} - y_0(x) = d\alpha \left(\frac{\partial \delta_\alpha(x)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}$$

Def: Variation des Funktionals

$$\delta I[y(x)] \equiv I[y_{\delta\alpha}(x)] - I[y_0(x)]$$

$$(70) \quad = \frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} d\alpha$$

$$= \int_{x_a}^{x_b} \left[f(x, y_{\delta\alpha}(x), y'_{\delta\alpha}(x)) - f(x, y_0(x), y'_0(x)) \right]$$

► Lösung des Variationsproblems:

Man finde $y_0(x)$, so daß

$$\left(\frac{dI}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0 \quad \text{für beliebige } \hat{y}_\alpha(x)$$

Auswertung

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_a}^{x_b} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx$$

man ist

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} dx = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) dx$$

$$= \int_{x_a}^{x_b} \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right] - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right\} dx$$

$$\underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_a}^{x_b}}_{=0} \quad \text{wg. (68a)}$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

bzw

$$(71) \quad \delta I = \int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx$$

Satz Ein Funktional

$$I[y(x)] = \int_{x_a}^{x_b} f(y(x), y'(x), x) dx$$

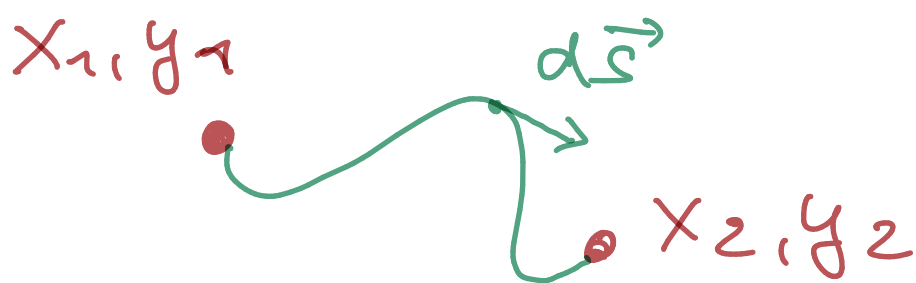
ist extremal unter Variation von $y(x)$ mit den Randbedingungen

$$y(x_a) = y_a \quad y(x_b) = y_b$$

d.h. es gilt $\delta I = 0$ dann und nur dann wenn

$$(72) \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad \text{Euler-Lagrange Gleichungen}$$

Bsp!: Was ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene?



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$I = \int_1^2 ds = \int_1^2 dx \sqrt{1 + y'^2} \quad \text{d.h. } f = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad \Rightarrow \text{Euler Lagrange} \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

$$\Rightarrow y' = a = \text{konst} \Rightarrow \underline{y(x) = ax + b} \quad \text{Gerade!}$$

Satz Das Hamiltonsche Prinzip für holonom,
konservative Systeme

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t), t) = 0$$

ist äquivalent zu den Euler-Lagrange
Gleichungen

$$(73) \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

(C) Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips
für nicht-konservative Systeme

Def: Variation der verallgemeinerten Wirkung

$$(74) \quad \delta \bar{S} \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt (\delta T - \delta W)$$

$$(75) \quad \text{mit} \quad \delta W = - \sum_{j=1}^N \vec{K}_j \cdot \delta \vec{r}_j \quad \text{virtuelle Arbeit}$$

Satz verallgemeinertes Hamilton'sches Prinzip (für holonome Systeme)

Die Bewegung eines Systems erfolgt so, daß die verallgemeinerte Wirkung für die tatsächliche Bahn extremal wird ("stationäre Bahn")

$$(76) \quad \delta \bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt (\delta T - \delta W) = 0$$

Folgerungen:

$$(77) \quad \delta W = - \sum_{j=1}^N \vec{K}_j \cdot \delta \vec{r}_j = - \sum_{e=1}^f Q_e \delta q_e$$

$$\delta \bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt (\delta T - \delta W) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{e=1}^f \left(\frac{\partial T}{\partial q_e} \delta q_e + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} \delta \dot{q}_e + \underline{Q_e \delta q_e} \right)$$

$$(78) \quad \begin{aligned} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{e=1}^f \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} \delta q_e \right) + \left[\frac{\partial T}{\partial q_e} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} \right) + Q_e \right] \delta q_e \right\} \\ &\quad \underline{\hspace{10em}} \quad \underline{\hspace{10em}} \end{aligned}$$

Randpunkte $\delta q_e(t_{1/2}) = 0$

$$\Rightarrow \delta \bar{S} = \int dt \sum_{e=1}^f \left[\frac{\partial T}{\partial q_e} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} + Q_e \right] \delta q_e = 0$$

unabhängig!

(79) $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

d'Alembert2

□

I.7 Erhaltungssätze und Symmetrien; Noether-Theorem

Def:

Größen $F_v = F_v(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$

heißen Integrale der Bewegung oder Erhaltungsgrößen, wenn

$$F_v = \text{konst}_t$$

- System mit f Freiheitsgraden $\rightarrow f$ DGL 2. Ordnung
Lösung erfordert $2f$ Anfangsbedingungen
- Existieren $2f$ Erhaltungsgrößen $\Rightarrow$ vollständige Lösung
- I.A. Zahl der Erhaltungsgrößen $< 2f$

- Wir werden sehen, daß Erhaltungsgrößen oft mit kontinuierlichen Symmetrien einhergeht

hier: holonome, konservative Systeme

(A) Homogenität in der Zeit

Def: Ein System ist homogen in der Zeit wenn die Lösung der Bewegungsgleichungen nur von $\underline{q}_a$ und $\underline{q}_b$ abhängt und gegen-
über einer beliebigen Zeitverschiebung invariant ist, d.h. wenn gilt

$$\underline{q}(t_a) = \underline{q}_a \quad \underline{q}(t_b) = \underline{q}_b \quad \Rightarrow \quad \underline{q}(t) = \underline{f}(t)$$

$\Downarrow$

$$\underline{q}(t_a + T) = \underline{q}_a \quad \underline{q}(t_b + T) = \underline{q}_b \quad \Rightarrow \quad \underline{q}(t) = \underline{f}(t + T)$$

(80)

zeitliche Homogenität $\Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$

Betrachten nun

$$\frac{d}{dt} L = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{q}_k} \dot{\underline{q}}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}_k} \ddot{\underline{q}}_k + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_0 \right)$$

$$= \sum_{k=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k} \ddot{q}_k = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right)$$

← Euler Lagrange

D.h.

$$(P1) \quad \frac{d}{dt} \left[L - \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right] = \frac{d}{dt} \left[L - \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k \right] = 0$$

Def.:

Die Größe

(P2)

$$H = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L$$

heißt
Hamiltonfunktion

Satz

Ist ein System homogen in der Zeit, d.h. gilt $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ so ist die Hamiltonfunktion ein Integral der Bewegung (Erhaltungsgröße)

$$\text{Homogenität in der Zeit} \Leftrightarrow H = \text{konst}_t$$

Bem.:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \not\Rightarrow L = \text{konst}_t$$

Was ist die Bedeutung dieses Satzes?

► betrachten skleronome (zeitunabhängige) Zwangsbedingungen;

$$(P3) \quad \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} = 0 \quad \vec{r}_j = \vec{r}_j(q_1, q_2, \dots, q_f)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \mu_j \dot{q}_j^2$$

homogene Funktion vom Grad 2 in $\dot{q}_k$

$$(P4) \quad \Rightarrow \sum_{j=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T$$

• konservatives System

$$(P5) \quad \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \forall j \text{ d.h. } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\Rightarrow 2T = \sum_{j=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^f p_j \dot{q}_j$$

d.h.

$$(P6) \quad H = 2T - L = 2T - T + V = T + V = E$$

Für holonom-skleronome Zwangsbedingungen sind Hamiltonfunktion und Energie identisch!

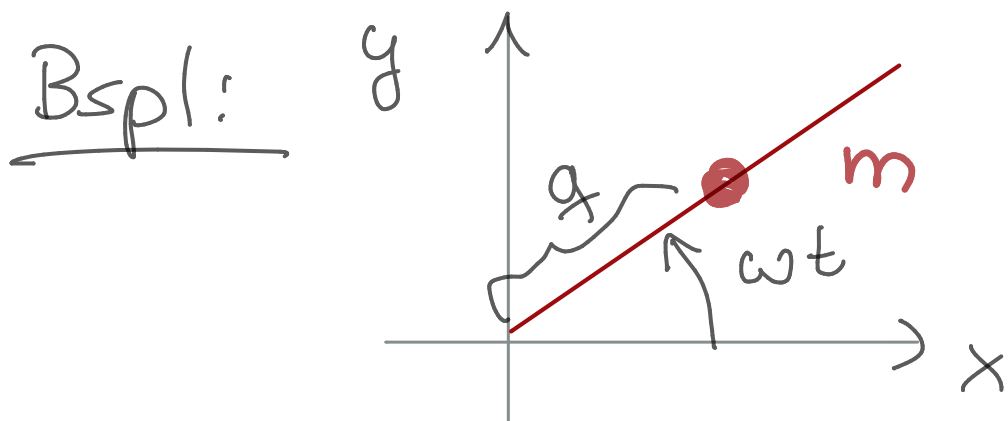
Homogenität in der Zeit für
holonom-skleveronome Zwangsbedingung.



(87)

$$H = E = \text{konst}_t$$

► betrachten nun reheonome Zwangsbedingung.



$$y = x \tan \omega t$$

$$L = T = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + \omega^2 q^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{dH}{dt} = 0}}}$$

nun ist $H = p \dot{q} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L$

$$= m \dot{q}^2 - \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + \omega^2 q^2)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \neq T = E$$

$\Rightarrow$ reheonome z.B. i-A.

$H \neq E$

(88)

(B) Homogenität im Raum

Nun nehmen wir an, daß q_α Translationen im Raum beschreiben; k charakterisiert die Translation
(z.B. in x Richtung ...)

$$(89) \quad \underline{\underline{\Delta \vec{r}_j = \Delta q_k \vec{n}_k}} \quad \text{keine Zusammenhang.}$$

betrachten ein System, das homogen im Raum ist bzgl. k , d.h.

(90)

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

$$(91) \quad \Rightarrow q_k \text{ zyklisch} \Rightarrow p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{konst}$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}}_{= \vec{n}_k}$$

$$(\text{wir hatten ja } \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k})$$

d.h.

$$(92) \quad p_k = \underbrace{\sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j}_{\vec{p}} \cdot \vec{n}_k = \vec{p} \cdot \vec{n}_k$$

$$\underline{\text{totale Impuls}} = \vec{p}$$

(93)

Homogenität im Raum bzgl. q_k

$$\vec{p} \cdot \vec{n}_k = \text{konst}_t$$

(c) Isotropie im Raum

Nun nehmen wir an, daß die q_k Rotationen
um die Achse $\vec{n}_k$ beschreiben

$$(94) \quad \underline{\underline{\Delta \vec{r}_j = \Delta q_k \vec{n}_k \times \vec{r}_j}} \quad (\text{keine Summenkonvention})$$

Betrachten ein System, daß isotrop bzgl. $\vec{n}_k$
ist, d.h.

$$(95) \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \quad q_k \text{ zyklisch}$$

$$\begin{aligned} p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} &= \text{konst} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_k} \\ &= \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \underbrace{\frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_k}}_{= \vec{n}_k \times \vec{r}_j} \quad \left(\text{da } \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial q_k} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_k = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot (\vec{n}_k \times \vec{r}_j) \quad \text{Skalarprodukt (zyklisch)}$$

$$(96) \quad = \vec{n}_k \cdot \sum_{j=1}^N m_j (\vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j) = \vec{n}_k \cdot \sum_{j=1}^N \vec{L}_j \quad \underline{\text{Drehimpuls}}$$

Isotropie im Raum bzgl. $\vec{n}_k$

$$(97) \quad \vec{n}_k \cdot \vec{L} = \vec{n}_k \cdot \sum_{j=1}^N m_j (\vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j) = \text{konst.}_t$$

(D) Noether Theorem

- Emmy Noether (23.03.1882 Erlangen - 14.04.1935 Bryn Mawr) Mathematikerin

Satz Noether Theorem

Ist die Lagrangefunktion $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ eines nicht explizit zeitabhängigen ("autonomen") Systems unter einer kontinuierlichen Transformation der verallgemeinerten Koordinaten

$$q_j \longrightarrow h_s(q_j) \quad \text{mit } h_{s=0}(q_j) = q_j$$

invariant (s ist eine kontinuierliche Variable) so ist

$$(98) \quad I(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{ds} h_s(q_j) \Big|_{s=0}$$

eine Erhaltungsgröße

Beweis: Sei $q(t) = f(t)$ Lösung der Euler-Lagrange Gleichung

Nach Voraussetzung ist dann auch $\psi(t) = h_s(f(t))$ Lösung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_j} = \frac{\partial L}{\partial \psi_j} \quad j=1,2,\dots,f$$

$$\frac{dL}{ds} = \sum_{j=1}^f \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_j} \frac{d\psi_j}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_j} \frac{d\dot{\psi}_j}{ds} \right] = 0$$

(Invarianz der Lagrange funktion)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^f \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_j} \right) \frac{d\psi_j}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_j} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\psi_j}{ds} \right) \right] = 0$$

bzw

$$\sum_{j=1}^f \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_j} \frac{d\psi_j}{ds} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^f \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_j} \frac{d\psi_j}{ds} \right] = \text{konst}_t \quad \square$$

Beispiel $L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j^2 - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$

• V sei invariant unter

$$h_s: \vec{r}_j \longrightarrow \vec{r}_j + s \vec{e}_x$$

d.h.

$$q_{j1} \rightarrow q_{j1} + S$$

Teilchen x, y, z

$$\frac{dh_s(q_{jm})}{dS} = \delta_{m1}$$

$$\Rightarrow I = \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{jm}} \quad \delta_{m1} = \sum_{j=1}^N m_j \dot{x}_j = P_x$$

Impuls in x -Richtung ist Erhaltungsgröße