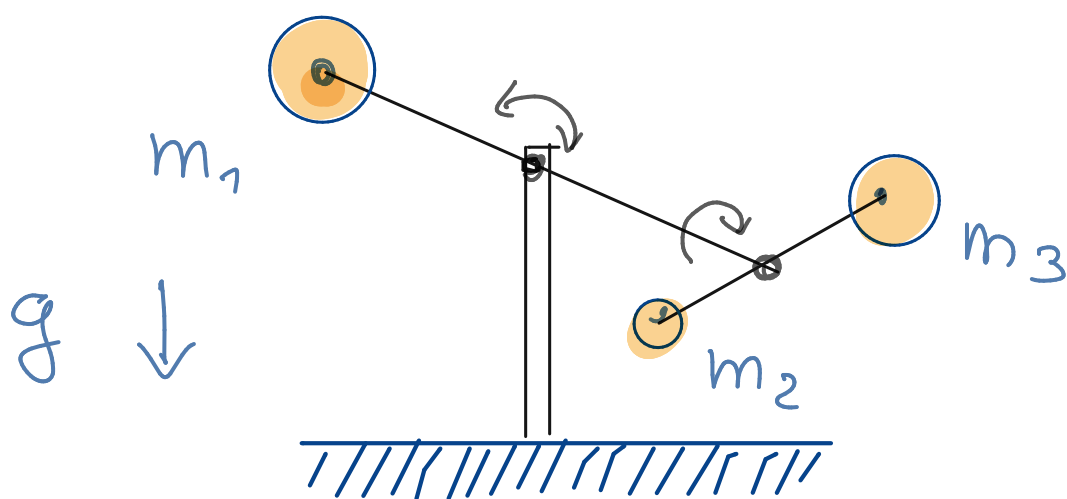


Eine Zusammenfassung der Newton'schen Mechanik des Massenpunktes und der Massenpunktsysteme ist in einer kleinen Sammlung von kurzen Videos über OLAT → Panopto zugänglich

I. Lagrang'sche Mechanik

Können wir die Newton'schen Gesetze in einer Form formulieren, die es erlaubt Zwangsbedingungen auf einfache und ökonomische Weise zu berücksichtigen?

Bspl:



feste Stangen-
längen!

I.1 Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten

Def: Zwangsbedingungen sind Bedingungen, die die freie Bewegung von Massenpunkten einschränken (geometrische Bedingungen)

Zwangsbedingungen werden durch Zwangskräfte bewirkt

Besonderheit:

- Zwangskräfte sind i.A. unbekannt (oder wir wollen sie nicht berechnen müssen); lediglich ihre Wirkung ist bekannt
- Teilchenkoordinaten $\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$ wegen Zwangsbeding. i.A. nicht mehr unabhängig

Klassifikation von Zwangsbedingungen

(A) holonome Zwangsbedingungen

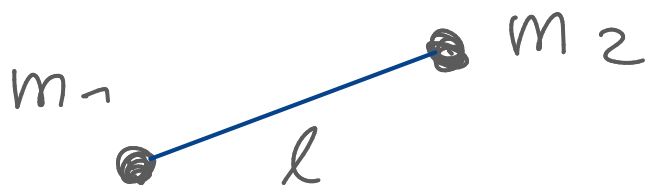
$$(1) \quad f_v(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 \quad v = 1, 2, \dots, p$$

p - Anzahl der Zwangsbedingungen

(i) holonom-skleronome Zwangsbedingung:

$$(2) \quad \frac{\partial f_v}{\partial t} = 0 \quad \text{d.h. nicht zeitabhängig}$$

Bsp1: • Hantel



$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0$$

• starrer Körper

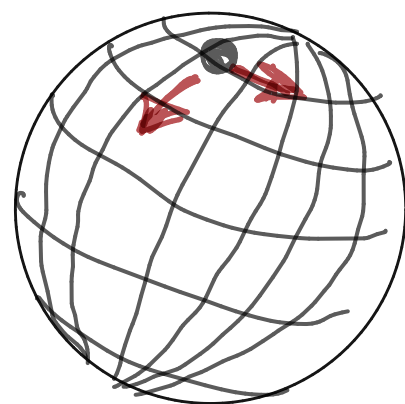
N Massenpunkte ($N \rightarrow \infty$)

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - l_{ij}^2 = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

• Massenpunkte auf Kugelschale

m

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$



(ii) holonom - rheonome Zwangsbedingungen

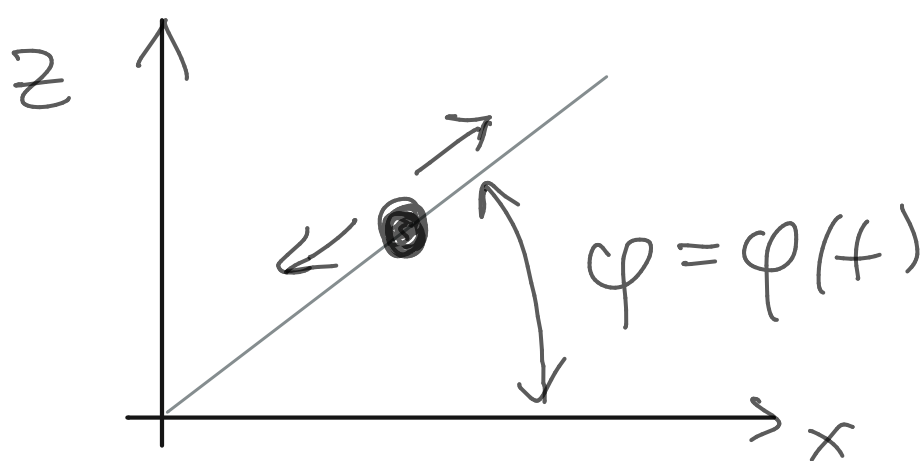
(3)

$$\frac{\partial f_v}{\partial t} \neq 0$$

zeitabhängig

Bspl:

Massenpunkt auf schiefer Gerade mit zeitlich variabler Neigung



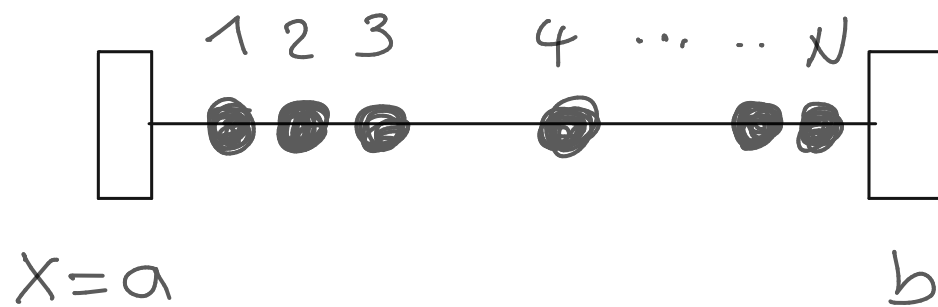
$$\frac{z}{x} - \tan \varphi(t) = 0$$

(B) nicht-holonome Zwangsbedingungen

Zwangsbedingungen, die sich nicht in holonomer Form darstellen lassen

- Zwangsbedingungen als Gleichungen

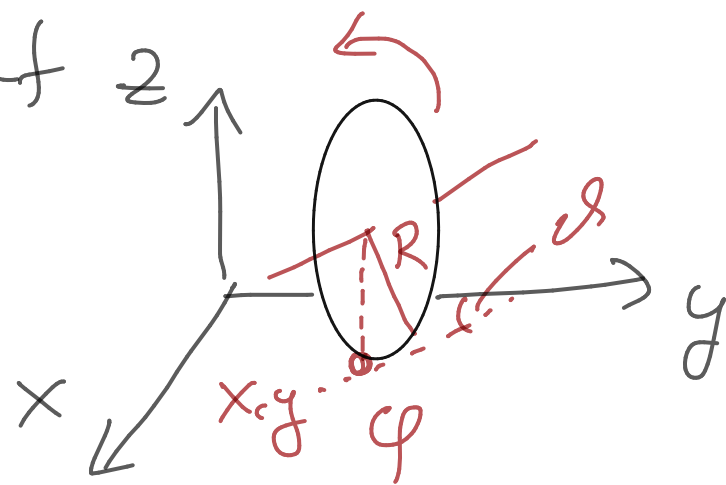
Bspl: Perlen auf Rechenbrett



$$a \leq x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_N \leq b$$

- Zwangsbedingungen in differentieller, nicht integrierbarer Form

Bspl: rollendes Rad auf ebener Unterlage



holonome Zwangsbedingungen erlauben die Zahl der Freiheitsgrade zu reduzieren!

N Massenpunkte ohne Zwangsbedingungen:

(4) $f = 3N$ Freiheitsgrade

bei p holonomen Zwangsbedingungen

(5) $f = 3N - p$

$$\{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N\} \longrightarrow \{q_1, \dots, q_f\}$$

+ p holonome Z.B. $f = 3N - p$

abhängig

unabhängig

Def: Die unabhängigen Größen $q_1, \dots, q_f$ eines Systems aus N Massenpunkten mit p holonomen Z.B. und $f = 3N - p$ verbleibenden Freiheitsgraden heißen verallgemeinerte Koordinaten, wenn sie die Zwangsbedingungen automatisch berücksichtigen

- Ziel:
- 1) Bestimmung der verallgem. Koordinaten
 - 2) Ableitung einfacher Prinzipien, die es erlauben, direkt Bewegungsgleichungen der verallgemeinerten Koordinaten abzuleiten ohne dabei explizit von den (unbekannten) Zwangskräften Gebrauch zu machen.

Bspl: MP auf Kugelschale $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 1$

$$\vec{r} = (x, y, z) \longrightarrow (\vartheta, \varphi) \quad f = 2$$

I.2 Das d'Alembertsche Prinzip, Lagrange Gleichungen

Problem: Eliminierung der unbekannten
Zwangskräfte

Def: virtuelle Verrückung: infinitesimale und
instantane Koordinatenverschiebung verträglich
mit Zwangsbedingungen $\delta \vec{r}_j$

Def: virtuelle Arbeit $\delta W_j = - \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j$

Newton-Gleichung bei Vorliegen einer Zwangskraft $\vec{Z}_j$

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j = \vec{K}_j + \vec{Z}_j \leftarrow$$

$$\Rightarrow \sum_j (\vec{K}_j - m_j \ddot{\vec{r}}_j) \cdot \delta \vec{r}_j + \sum_j \vec{Z}_j \cdot \delta \vec{r}_j = 0$$

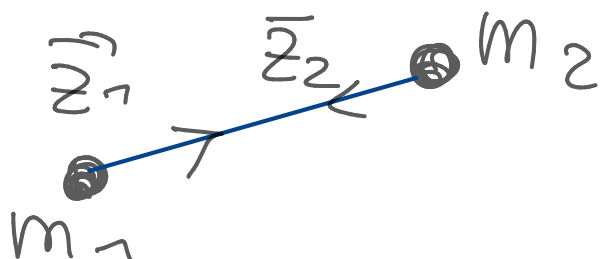
Prinzip der virtuellen Arbeit

$$(6) \quad \sum_j \vec{Z}_j \cdot \delta \vec{r}_j = 0$$

Zwangskräfte leisten bei
virtueller Verrückung keine
Arbeit

Bspl:

• Hantel:



$$\vec{Z}_1 = - \vec{Z}_2$$

erlaubte virtuelle Verschiebung

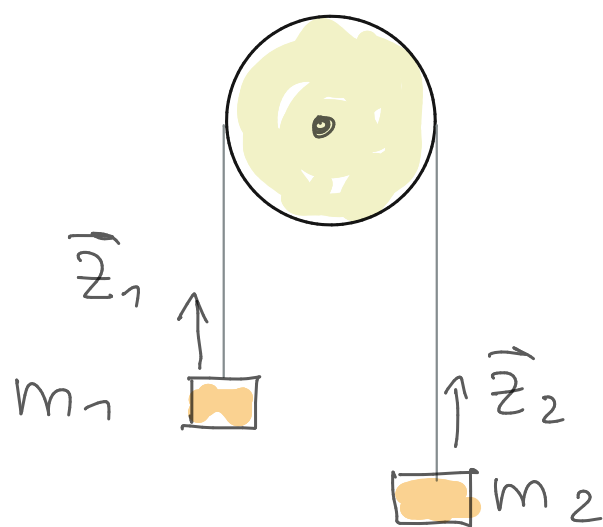
$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{s}$$

$$\delta \vec{r}_2 = \delta \vec{s} + \delta \vec{x}_{\text{rot}}$$

Rotation um Masse m_1

$$\begin{aligned} \delta W &= -\vec{z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 - \vec{z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = -(\underbrace{\vec{z}_1 + \vec{z}_2}_{=0}) \cdot \delta \vec{s} \\ &\quad - \underbrace{\vec{z}_2 \cdot \delta \vec{x}_{\text{rot}}}_{\text{da } \vec{z}_2 \perp \delta \vec{x}_{\text{rot}}} = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

• Atwood'sche Fallmaschine



$$\vec{z}_1 = \vec{z}_2$$

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \text{konst}$$

$$\delta W = -\vec{z}_1 \cdot \delta \vec{x}_1 - \vec{z}_2 \cdot \delta \vec{x}_2$$

$$= \vec{z}_1 \cdot (\underbrace{\delta \vec{x}_1 + \delta \vec{x}_2}_{=0}) = 0$$

Bem.: Reibungskräfte sind i.A. keine Zwangskräfte!

$$\delta W = -\vec{F}_{\text{Reib}} \cdot \delta \vec{r} \neq 0 !$$

mit 2. N. Axiom

d'Alembert Prinzip

$$(7) \quad \sum_{j=1}^N (\vec{K}_j - \overset{\circ}{\vec{p}}_j) \cdot \delta \vec{r}_j = 0$$

Zwangskräfte
sind
eliminiert!



aber: virtuelle Verschiebungen $\delta \vec{r}_j$ sind wegen
Zwangsbedingungen nicht unabhängig 😞

jetzt: holonome Zwangsbedingungen

$$f_r(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad \leadsto \quad \vec{r}_j = \vec{r}_j(q_1, \dots, q_f, t)$$

$$(8) \quad \dot{\vec{r}}_j = \sum_{e=1}^f \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_e} \dot{q}_e + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} = \vec{r}_j(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$$

und wir sehen

virtuelle (instantan!!) Verschiebung

$$(9) \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_e} = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_e} \quad \delta \vec{r}_j = \sum_{e=1}^f \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_e} \delta q_e$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^N \vec{k}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_{j=1}^N \vec{k}_j \cdot \sum_{e=1}^f \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_e} \delta q_e \equiv \sum_{e=1}^f Q_e \cdot \delta q_e$$

generalisierte Kräfte

$$(10) \quad Q_e \equiv \sum_{j=1}^N \vec{k}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_e}$$

Bem: Die q_j haben nicht notwendigerweise die physikalische Dimension "Länge" $\Rightarrow Q_e$ haben nicht notwendig Dimension einer Kraft

Schauen uns zweiten Term in d'Alembert Prinzip an:

$$\sum_{j=1}^N \vec{p}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\vec{r}}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_{j=1}^N \sum_{e=1}^f m_j \ddot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_e} \delta q_e$$

man gilt $\ddot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_e} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_e} \right) - \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_e} \right)$

mit Gl. (9) $\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_e} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_e} = \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_e}$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_e} \delta q_e &= \sum_{j=1}^N \left\{ m_j \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_e} \right) - m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_e} \right\} \delta q_e \\ (11) \quad &= \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_e} \left(\frac{m_j}{2} \vec{v}_j^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_e} \left(\frac{m_j}{2} \vec{v}_j^2 \right) \right\} \delta q_e \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} - \frac{\partial T}{\partial q_e}$$

$$T = \sum_j \frac{m_j}{2} \vec{v}_j^2$$

kinetische Energie

$\Rightarrow$

$$(12) \quad \sum_{e=1}^f \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_e} - Q_e \right\} \delta q_e = 0$$

Da die verallgemeinerten Koordinaten per Definition unabhängig sind, folgt aus (12)

(13)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_e} = Q_e$$

 $\forall e=1,2,\dots,f$ betrachten konervative Kräfte

(14)

$$\vec{K}_j = - \vec{\nabla}_j V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

V - Potential
(potentielle Energie) $\Rightarrow$

$$(15) \quad Q_e = - \sum_{j=1}^N \vec{\nabla}_j V \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_e} = - \frac{\partial}{\partial q_e} V(q_1, \dots, q_f, t)$$

kommt rein wegen
 $f_V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t) = 0$ Def: Die Größe

(16)

$$L(q_e, \dot{q}_e, t) = T(q_e, \dot{q}_e) - V(q_e, t)$$

heißt Lagrange FunktionDa $\partial V / \partial \dot{q}_e = 0$ Satz: Lagrang'sche Gleichungen

(17)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Bem:skleronome Zwangsbed. $\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

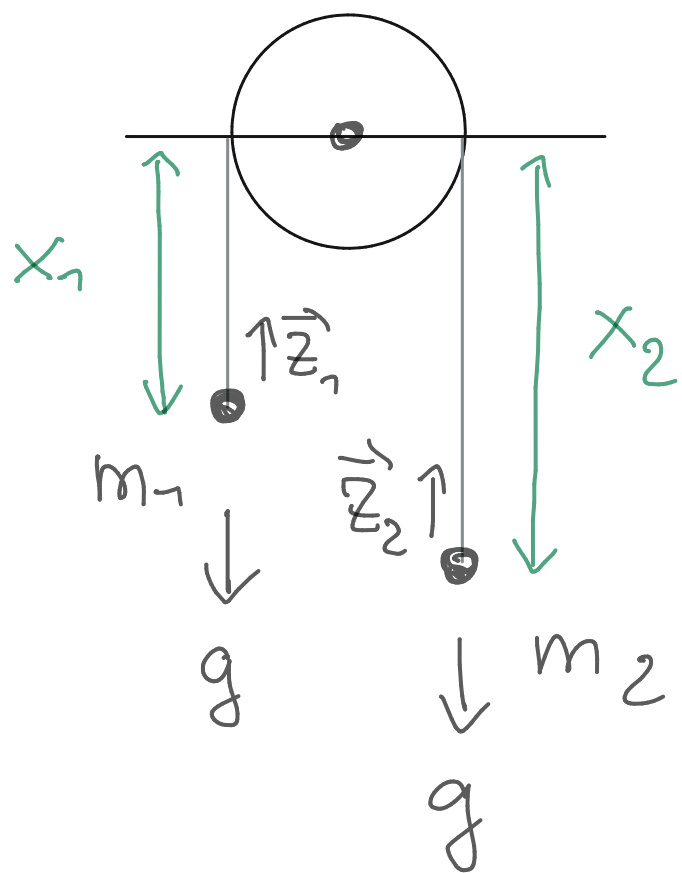
I.3 Einfache Anwendungen

hier: konservative Kräfte und holonome Zwangsbed.

allg. Lösungsweg

1. Zwangsbedingungen formulieren
2. generalisierte Koordinaten festlegen
3. Lagrange Funktionen $L = T - V = L(q_k, \dot{q}_k, t)$ aufstellen
4. Lagrange Gleichungen ableiten und lösen
5. Rücktransformation auf "anschauliche" Koordinaten

(A) Atwood'sche Fallmaschine



5 holonom - skleronome z.B.

$$x_1 + x_2 = \ell$$

$$y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$$

$$f = 6 - 5 = 1 \text{ Freiheitsgrad}$$

$$\Rightarrow q = x_1 \quad (x_2 = \ell - q)$$

$$(18) \quad T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}^2$$

$$(19) \quad V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = -m_1 g q - m_2 g (l - q)$$

$$(20) \Rightarrow L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}^2 + (m_1 - m_2) g q + m_2 g l$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2) \ddot{q} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = (m_1 - m_2) g$$

$$(21) \Rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{q} - (m_1 - m_2) g = 0$$

$$(22) \quad \underline{\underline{\ddot{q} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g}} \quad \text{verzögerte freie Fall}$$

Faden spannung (Zwangskraft)

$$(23) \quad m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g + Z_1 \quad m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g + Z_2$$

$$\text{man ist } \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 = \ddot{q} \Rightarrow$$

$$\bullet \quad m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2 = (m_1 - m_2) g + (Z_1 - Z_2)$$

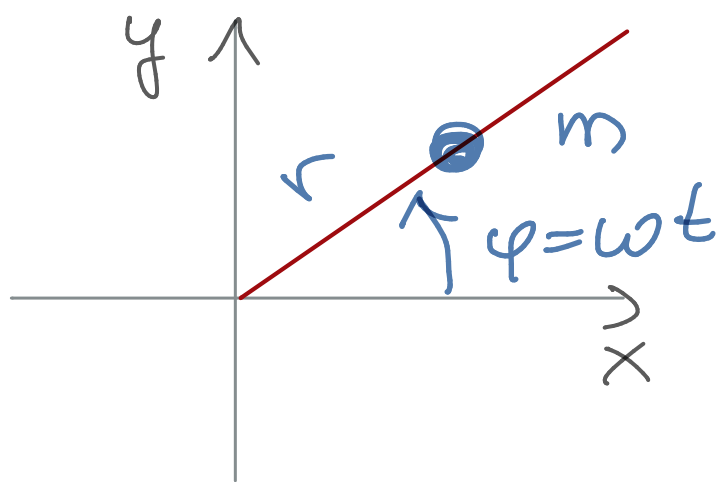
$$\parallel \quad (m_1 + m_2) \ddot{q} = (m_1 - m_2) g \Rightarrow \underline{\underline{Z_1 = Z_2}}$$

$$\bullet \quad m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = (m_1 + m_2) g + 2Z$$

$$\parallel \quad (m_1 - m_2) \ddot{q} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} g$$

$$(24) \Rightarrow \quad \underline{\underline{Z = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = -2g M_{red}}}$$

(B) Gleitender Massenpunkt auf gleichförmig rotierender Stange



2 holonome Zwangsbedingungen

$$z = 0 \quad y = x \tan \omega t$$

$$\Rightarrow q = r$$

$$x = q \cos \omega t \quad y = q \sin \omega t \quad \omega = \text{const}$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2)$$

$$V = 0$$

$$(25) \quad L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2)$$

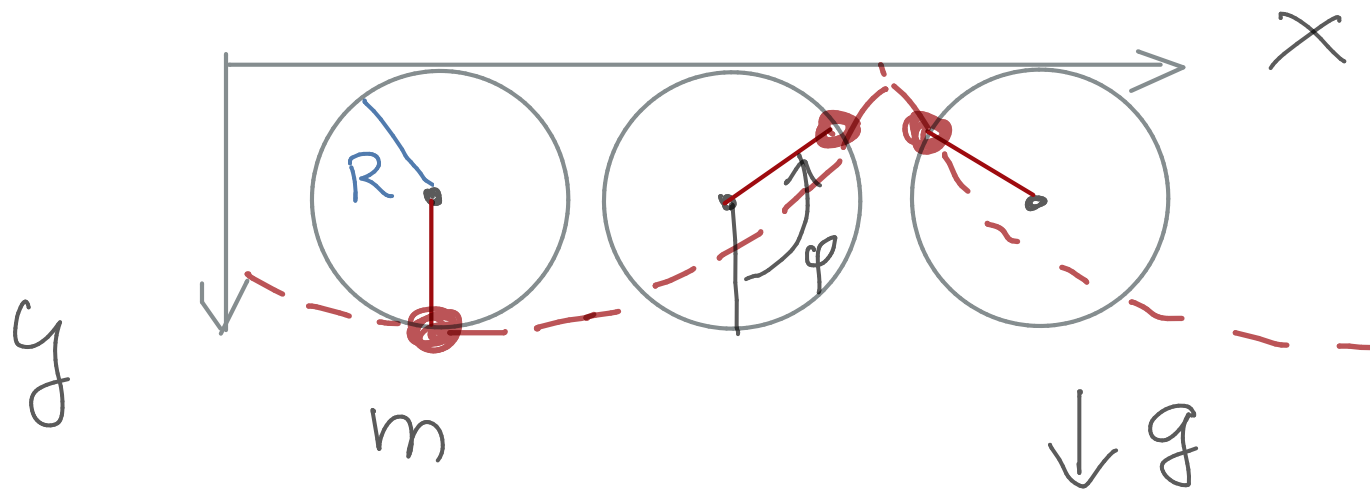
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \ddot{q} = \frac{\partial L}{\partial q} = m \omega^2 q$$

$$(26) \quad \ddot{q} = \omega^2 q \quad \text{inverted oscillator}$$

$$(27) \quad q(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$$

$$(28) \quad \begin{aligned} x(t) &= (A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}) \cos \omega t \\ y(t) &= (A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}) \sin \omega t \end{aligned}$$

(c) Zykloidenpendel



1. 2 ways b.

$x = R \varphi + R \sin \varphi = R (\varphi + \sin \varphi)$

Mittelpunkt
(Abrollen)

Masse rotiert
zu Mittelpunkt

$$y = 2R - R(1 - \cos \varphi) = R(1 + \cos \varphi)$$

$$f = 2 - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad g = \varnothing$$

$$\dot{x} = R\dot{\varphi}(1 + \cos\varphi) \qquad \dot{y} = -R\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$(29) \quad T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = m R^2 \dot{\varphi}^2 (1 + \cos \varphi)$$

pot. Energie

$$(30) \quad V = -mgy = -mgR(1 + \cos\varphi)$$

$$(31) \quad L = T - V = mR(1 + \cos\varphi)(R\dot{\varphi}^2 + g)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mR^2(1+\cos\varphi)\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mR\sin\varphi(R\dot{\varphi}^2 + g)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{mit } 1+\cos\varphi = 2\cos^2\varphi/2$$

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$\Rightarrow$

$$2\ddot{\varphi}\cos\frac{\varphi}{2} - \dot{\varphi}^2\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{g}{R}\sin\frac{\varphi}{2} = 0$$

$$(32) \quad \frac{d^2}{dt^2} \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{g}{4R} \sin\frac{\varphi}{2} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{neue Variable} \\ \xi = \sin\frac{\varphi}{2} \end{array}$$

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{4R} \xi = 0 \quad \xi(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

$$(33) \quad \underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}}}$$

$$(34) \quad \underline{\underline{\varphi(t) = 2 \arcsin [Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}]}}$$

I.4 Folgerungen und Verallgemeinerungen

(A) zyklische Variable und verallgemeinerte Impulse

Def: Eine verallgemeinerte Koordinate q_k heißt zyklisch, falls die Lagrangefunktion nicht von ihr abhängt, d.h.

$$(35) \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_k \text{ zyklisch}$$

dann gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

Def: Die Größe

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

(36)

wird verallgemeinerte Impuls genannt

Ist q_k eine zyklische Koordinate so ist der zugehörige verallgemeinerte Impuls eine Erhaltungsgröße

$q_k = \text{zyklisch}$

$$\frac{d}{dt} p_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

Bspl: Bewegung im Zentralpotential $V(r)$ in (x, y) Ebene

holonome Z.B. $z=0$

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

$$T = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 \quad V = V(r)$$

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 - V(r)$$

$$\varphi: \text{zyklisch da } \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = L_z \quad \begin{array}{l} \text{Drehimpuls in } z\text{-Richtung} \\ \text{verallg. Impuls} \\ \rightarrow \text{Erhaltungsgröße} \end{array}$$

(B) Lagrangegleichungen für geschwindigkeitsabhängige Kräfte

holonome Zwangsbedingungen aber geschwindigkeitsabhängige Kraft, d.h. $\nexists$ Potential V und somit $\nexists$ Lagrangefunktion $\rightarrow$ was in einem solchen Fall tun?

$\Rightarrow$ d'Alembert Gleichung (13)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j(q_k, \underline{\dot{q}_k}, t)$$

Def: verallgemeinertes Potential

$$(37) \quad U = U(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$$

(38) falls

$$Q_j \equiv \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}}_{\text{neuer Term}} - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Existiert ein verallgemeinertes Potential
 $U = U(q_n, \dot{q}_n, t)$

So gelten die Lagrangeschen Gleichungen mit der
verallgemeinerten Lagrange-funktion

$$(39) \quad L = T - U$$

Beweis:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - U)}_{=L} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_j} (T - U)}_{=L} = 0 \quad \square$$

Bspl: geladenes Teilchen im elm. Feld

$$(40) \quad \vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Edyn. $\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

d.h. $\vec{F} = -e \left[-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \text{rot} \vec{A} \right]$

Beh. $F_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j} \quad \boxed{U = -e(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})} \quad (41)$

verallgemeinertes Potential
der Lorentzkraft

Beweis: Übungsaufgabe

In diesem Beispiel hängt die Lagrangefunktion von den elm. Potentialen ab $L = T - U(\phi, \vec{A})$. Diese sind aber nicht eindeutig (Eichfreiheit der Elektrodynamik)

$\Rightarrow$ Lagrangefunktion nicht eindeutig? ja!

(C) Eichfreiheit der Lagrangefunktion

Addiert man zur Lagrangefunktion die totale Zeitableitung einer Funktion $f(q_k, t)$ der Koordinaten und der Zeit (nicht aber der Impulse) so bleiben die Bewegungsgleichungen unverändert

(42) $L \rightarrow L + \frac{d}{dt} f(q_k, t)$

mechanische Eichtransformation

Beweis: $L_0 = \frac{d}{dt} f$

$$\frac{\partial L_0}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{df}{dt} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial t} + \sum_e \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_e} \dot{q}_e$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_e \frac{\partial f}{\partial q_e} \dot{q}_e \right)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{\text{=0}} \\ \boxed{\text{=}\delta_{ek}} \end{array} \uparrow$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial q_k} + \sum_e \frac{\partial^2 f}{\partial q_e \partial q_k} \dot{q}_e$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial q_k} - \frac{\partial L_0}{\partial q_k} = 0 \quad \forall k \quad \square$$

$\Rightarrow$ Lagrangefunktionen sind nicht eindeutig!
Man darf eine totale Zeitableitung einer Funktion nur der Koordinaten und der Zeit addieren ohne daß sich die Physik ändert,

Zusatzkapitel (Zusatzvideo):

I. 5 Allgemeine Zwangsbedingungen und Lagrangegleichungen 1. Art

Was tun wenn Zwangsbedingungen nicht holonom?

- Transformation von Teilchenkoordinaten $\vec{r}_j$ auf generalisierte Koordinaten nicht möglich.

- $\vec{r}_j$ nicht unabhängig.

► System mit m Zwangsbedingungen davon p nicht holonom und $m-p \geq 0$ holonom

$$(43) \quad \sum_{k=1}^{3N} f_{jk}(x_1, \dots, x_{3N}, t) dx_k + f_{j0}(x_1, \dots, x_{3N}, t) dt = 0 \quad j=1, 2, \dots, p$$

1. Schritt Einführung verallg. Koordinaten für $m-p$ holonome z.B.

$$(44) \quad \vec{r}_j = \vec{r}_j(q_1, \dots, q_f, t)$$

q_j jetzt noch nicht unabhängig wegen p nicht holon. z.B.

$$f = 3N - (m-p)$$

2. Schritt Umschreiben der nicht-holonomen z.B. auf verallgemeinerte Koordinaten

$$(45) \quad \sum_{k=1}^f a_{jk} dq_k + a_{j0} dt = 0 \quad j=1, 2, \dots, p$$

virtuelle Verrückungen ($\delta t=0$) definiert durch

$$(46) \quad \sum_{k=1}^f a_{jk} \delta q_k = 0$$

3. Schritt

Einführung von p Lagrangischer Multiplikatoren $\lambda_j = \lambda_j(x)$ die unabhängig von den q_k sind

$$(47) \quad \sum_{j=1}^p \lambda_j \sum_{k=1}^f a_{jk} \delta q_k = 0$$

nicht-holonome
Zwangsbed.

holonome
z.B.

folgt trivial
aus (46)

4. Schritt

Annahme: konservatives System
d'Alembert mit $L = T - V$

$$(48) \quad \sum_{k=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0$$

aber: δq_k nicht unabhängig wg.
nicht-holonomen Zwangsbed. !!

Addition einer "dumme Null"

$$(49) \quad \sum_{k=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^p \lambda_j a_{jk} \right) \delta q_k = 0$$

5. Schritt

von f generalisierten Koordinaten
nur $f-p$ frei wählbar; Rest abhängig
wegen p nicht-holonomen z.B.
Aber: Wir haben noch p Lagrange-
multiplikatoren frei!

Wahl q_k $k=1,2,\dots,f-p$ unabhängig

q_k $k=f-p+1,\dots,f$ abhängig

Wählen λ_j so, daß für $k=f-p+1,\dots,f$ gilt

$$(50) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^p \lambda_j a_{jk} \stackrel{!}{=} 0$$

Einsetzen in (49) liefert

$$(51) \quad \sum_{k=1}^{f-p} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^p \lambda_j a_{jk} \right\} \delta q_k = 0$$

$\uparrow$
 unabhängig

50+51 $\Rightarrow$

Lagrange Gleichungen 1. Art

$$(52) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^p \lambda_j a_{jk} \quad k=1,2,\dots,f$$

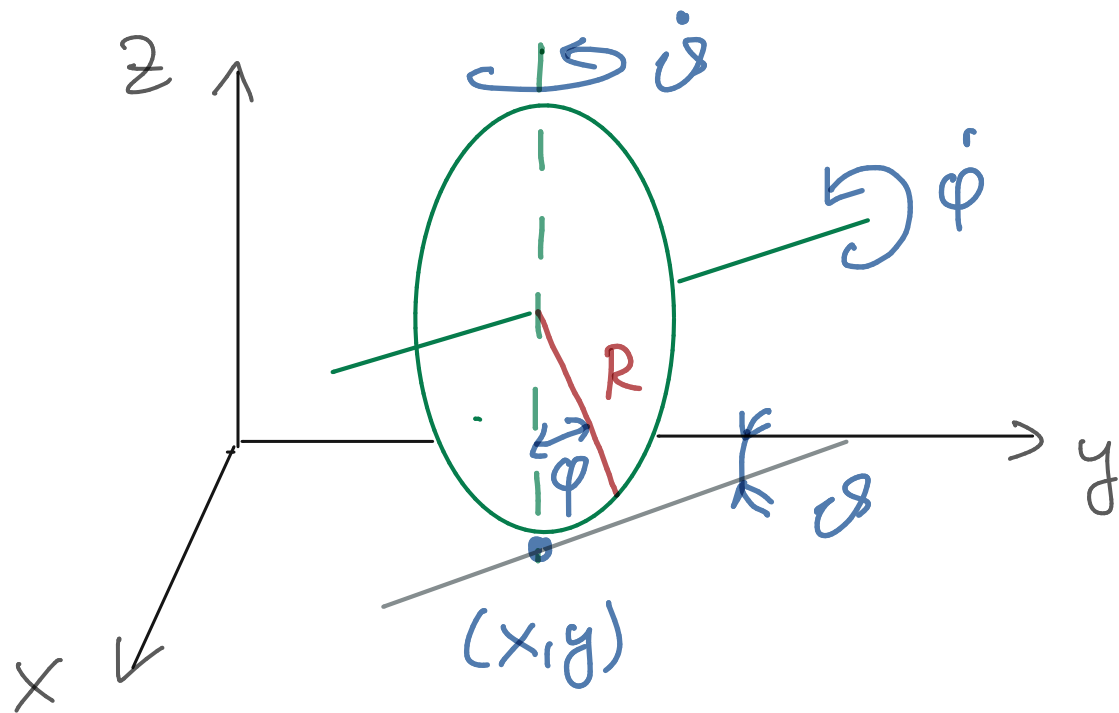
f Gleichungen für $f+p$ Unbekannte (q_k, λ_j)

$\Rightarrow$ zusätzlich p nicht holonome Zwangsbed.

$$(53) \quad \sum_{k=1}^p a_{jk} \dot{q}_k + a_{j0} = 0$$

Beispiel

Rollen des Rad auf ebener Unterlage



$$q_1 = x \quad q_2 = y \quad q_3 = \varphi \quad q_4 = \vartheta \quad f = 4$$

"Rollen"

$$\bullet \quad |\vec{v}| = R \dot{\varphi}$$

$$\bullet \quad \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \text{ senkrecht zur Radachse}$$

$$(54) \quad \dot{x} = v_x = v \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = v \cos \vartheta$$

$$(55) \quad \dot{y} = v_y = v \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = v \sin \vartheta$$

$$(56) \Rightarrow \quad \dot{x} - R \dot{\varphi} \cos \vartheta = 0 \quad \dot{y} - R \dot{\varphi} \sin \vartheta = 0 \quad p = 2$$

$$\text{mit} \quad \sum_{k=1}^4 a_{jk} \dot{q}_k + a_{j0} = 0 \quad j = 1, 2$$

$$(57) \quad \begin{array}{llll} a_{11} = 1 & a_{12} = 0 & a_{13} = -R \cos \vartheta & a_{14} = 0 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = 1 & a_{23} = -R \sin \vartheta & a_{24} = 0 \end{array}$$

d.h.

$$(58) \quad L = T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \underbrace{\frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\vartheta}^2}_{\text{das ist input aus "Starrkörper" siehe später}}$$

das ist input aus "Starrkörper" siehe später

Lagrange Gleichungen 1. Art $\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$m \ddot{x} = \lambda_1 \quad m \ddot{y} = \lambda_2$$

$$(59) \quad J_1 \ddot{\varphi} = -R \lambda_1 \cos \vartheta - R \lambda_2 \sin \vartheta$$

$$J_2 \ddot{\vartheta} = 0$$

$$(60) \Rightarrow \vartheta(t) = \omega t + \vartheta_0 \quad \text{O.B.d.A. } \vartheta_0 = 0$$

nicht-holonomen z.B. waren

$$(61) \quad \underbrace{\dot{x}}_{\omega t} - R \cos \vartheta \underbrace{\dot{\varphi}}_{\omega t} = 0 \quad \underbrace{\dot{y}}_{\omega t} - R \sin \vartheta \underbrace{\dot{\varphi}}_{\omega t} = 0$$

Differenzieren liefert

$$(62) \quad \underline{\underline{\ddot{x} = -R \omega \dot{\varphi} \sin \omega t + R \ddot{\varphi} \cos \omega t}}$$

$$\underline{\underline{\ddot{y} = R \omega \dot{\varphi} \cos \omega t + R \ddot{\varphi} \sin \omega t}}$$

Einsetzen in (59) eliminiert Lagrangeparameter $\lambda_{1/2}$

$$\lambda_1 = -mR\omega \sin \omega t \dot{\varphi} + mR \cos \omega t \ddot{\varphi}$$

$$\lambda_2 = mR\omega \cos \omega t \dot{\varphi} + mR \sin \omega t \ddot{\varphi}$$

$\Rightarrow$ mit (59)

$$J_1 \ddot{\varphi} = -mR^2 \ddot{\varphi} \quad \text{da } J_1 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\ddot{\varphi} = 0}}$$

$$\underline{\underline{\dot{\varphi} = \tilde{\omega} t + \varphi_0}} \quad \text{O.B.d.A. } \varphi_0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\underline{\ddot{x} = -R\omega \tilde{\omega} t \sin \omega t}}$$

$$\underline{\underline{\ddot{y} = R\omega \tilde{\omega} t \cos \omega t}}$$

I.6 Das Hamiltonsche Prinzip

d'Alembert Prinzip – differentielles Prinzip

Jetzt wollen wir ein Integralprinzip ableiten

(A) Formulierung und Äquivalenz zu d'Alembert

Def: konfigurationsraum: f generalisierte Koordinaten
 $q_1, \dots, q_f$