

VII.3 Lokales Gleichgewicht und hydrodynamische Gleichungen

(A) Erhaltungsgrößen der Boltzmann-Gleichung

Die Boltzmann-Gleichung für die Einzelteilchenverteilungsfunktion $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ hat folgende erhaltene Dichten für die eine Kontinuitätsgleichung gilt

(502) Teilchenzahldichte $n(\vec{r}, t) = \int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t)$

(503) Impulsdichte $\vec{m}_j(\vec{r}, t) = m \int d^3v \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t)$
 $= m n(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t)$

d.h.
(504) $\vec{u}(\vec{r}, t) \equiv \frac{\int d^3v \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t)}$

Energiedichte (wenn keine potentielle Energie)

$$\int d^3v \frac{m}{2} v^2 f(\vec{v}, \vec{r}, t) =$$

$$= \int d^3v \frac{m}{2} \left[\underbrace{\vec{u}^2(\vec{r}, t)}_{\text{lokale mittlere Geschwindigkeit}} - \underbrace{(\vec{v} - \vec{u}(\vec{r}, t))^2}_{\text{Relativgeschwindigkeit}} \right] f(\vec{v}, \vec{r}, t)$$

(505)

$$= m n(\vec{r}, t) \frac{\vec{u}^2(\vec{r}, t)}{2} + n(\vec{r}, t) e(\vec{r}, t)$$

Energiedichte der
lokalen konvektiven Strömung

mittlere kinetische
Energie im lokalen
Ruhesystem

(506)

$$e(\vec{r}, t) = \frac{\frac{m}{2} \int d^3v (\vec{v} - \vec{u}(\vec{r}, t))^2 f(\vec{v}, \vec{r}, t)}{\int d^3v f(\vec{v}, \vec{r}, t)}$$

Die explizite Form der Kontinuitätsgleichungen (Erhaltungssätze) werden wir noch ableiten.

(B) Stoßinvarianten und lokales Gleichgewicht

Wir werden nun diskutieren, daß ein Gas welches der Boltzmann Gleichung genügt im Laufe der Zeit zunächst in einen lokalen Gleichgewichts- und dann in einen globalen Gleichgewichtszustand übergeht.

Dazu fragen wir uns zunächst unter welchen Umständen der Stoßterm in der Boltzmann-Gleichung verschwindet, d.h. wie $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ aussehen muß, damit

$$(507) \quad f_1 f_2 - f_3 f_4 \stackrel{?}{=} 0 \quad \left(\text{alle } f\text{'s haben das gleiche Ort-argument} \right)$$

d.h.

$$(508) \quad \ln f_1 + \ln f_2 = \ln f_3 + \ln f_4$$

Größen die Gl. (508) erfüllen heißen Stoßinvarianten

Wegen Energie- und Impulserhaltung beim Stoß sind dies

$$(509) \quad \chi^{1,2,3} = m v_{1,2,3} \quad \begin{array}{l} \text{Impuls} \\ v_1 = v_x, v_2 = v_y \end{array}$$

$$(510) \quad \chi^4 = \frac{m}{2} v^2 \quad \text{Energie}$$

$$(511) \quad \chi^5 = 1$$

Man kann zeigen, daß es außer diesen 5 Stoßinvarianten keine weiteren gibt.

Der allgemeinste Ausdruck für den Logarithmus der Verteilungsfunktion für den der Stoßterm verschwindet lautet also

$$(512) \quad \log f^L(\vec{r}, \vec{v}, t) = \alpha(\vec{r}, t) + \beta(\vec{r}, t) \left(\vec{u}(\vec{r}, t) \cdot m \vec{v} - \frac{m}{2} v^2 \right)$$

Dies entspricht einer lokalen Gleichgewichts- (Maxwell-) Verteilung

$$(513) \quad f^L(\vec{r}, \vec{v}, t) = n(\vec{r}, t) \left(\frac{m}{2\pi k_B T(\vec{r}, t)} \right)^{3/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{m}{2k_B T(\vec{r}, t)} \left(\vec{v} - \vec{u}(\vec{r}, t) \right)^2 \right\}$$

wobei die Faktoren mit $T(\vec{r}, t)$ nur eine Umschreibung der Koeffizienten $\alpha(\vec{r}, t), \beta(\vec{r}, t)$ sind und

$$T(\vec{r}, t) \quad \hat{=} \quad \text{lokale Temperatur}$$

$$(514) \quad n(\vec{r}, t) \quad \hat{=} \quad \text{lokale Teilchendichte}$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) \quad \hat{=} \quad \text{lokale Geschwindigkeitsdichte}$$

Für Verteilungen der Form (513) verschwindet der Stoßterm, aber sie sind nur Lösungen der Boltzmann-Gleichung falls

$$(515) \quad n(\vec{r}, t) = n = \text{const}$$

$$T(\vec{r}, t) = T = \text{const}$$

Dies entspricht dem globalen Gleichgewicht

Nichtgleichgewicht mit Stößen

lokales Gleichgewicht
 $n(\vec{r}, t); T(\vec{r}, t)$

(*)

globales Gleichgewicht
 n, T

(C) Hydrodynamische Gleichungen

Unter der Annahme, daß sich das System bereits in einem lokalen Gleichgewicht befindet: Wie sieht die weitere Dynamik (*) aus?

Ansatz: $f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f^e(\vec{r}, \vec{v}, t)$ nach (513)

$\Rightarrow$ Gleichung für $n(\vec{r}, t), \vec{u}(\vec{r}, t)$?
 $k_B T(\vec{r}, t)$.

Einsetzen von $f^e(\vec{r}, \vec{u}, t)$ in Boltzmann-Gl.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_r + \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}_u \right) f^e(\vec{r}, \vec{u}, t) = 0$$

liefert die hydrodynamischen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \cdot n(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t)$$

$$m n(\vec{r}, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} = -\vec{\nabla} P + n \vec{F}(\vec{r}, t)$$

$$n(\vec{r}, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) e = -P \vec{\nabla} u$$

$$m \vec{u} + P = \sum_{j=1}^3 \int d^3 u \, m (u_j - u_j(\vec{r}, t)) (u_j - u_j(\vec{r}, t)) f(\vec{u}, \vec{r}, t)$$

$$(517) \quad P = P(\vec{r}, t) \equiv n(\vec{r}, t) k_B T(\vec{r}, t)$$

lokaler Druck ($p = \frac{N}{V} k_B T$)

Eine stationäre Lösung ohne äußere Kräfte ($\vec{F} = 0$)

ist

$$n(\vec{r}, t) = n = \text{const} \quad \vec{u} = 0$$

(D) Explizite Form der Erhaltungssätze

Zunächst sei bemerkt, daß alle erhaltenen Größen (502), (503) und (505) mit Stoßinvarianten verknüpft werden können

$$n(\vec{r}, t) = \int d^3v \, \chi^5 f(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$(518) \quad m \vec{j}_e(\vec{r}, t) = m n(\vec{r}, t) \vec{v}_e(\vec{r}, t) \\ = \int d^3v \, \chi^e f(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad e=1,2,3$$

$$n(\vec{r}, t) \left[\frac{m}{2} \vec{u}^2(\vec{r}, t) + e(\vec{r}, t) \right] = \int d^3v \, \chi^4 f$$

Boltzmann Gleichung

$$(519) \quad \left. \int d^3v \, \chi^\alpha \cdot \right| \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} \right) f(\vec{r}, \vec{v}, t) = \\ = \int d^3v_2 \int d^3v_3 \int d^3v_4 \, W(v, v_2; v_3, v_4) \\ \cdot (f_1 f_2 - f_3 f_4)$$

Mit Hilfe der Identität

$$\begin{aligned}
 & \int d^3v_1 \int d^3v_2 \int d^3v_3 \int d^3v_4 W(v_1, v_2; v_3, v_4) (f_1 f_2 - f_3 f_4) \varphi_1 \\
 &= \frac{1}{4} \int d^3v_1 \cdots \int d^3v_4 W(v_1, v_2; v_3, v_4) (f_1 f_2 - f_3 f_4) \\
 (520) \quad & (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)
 \end{aligned}$$

die aus den Symmetrieeigenschaften von W abgeleitet werden kann folgt daß das Integral über den Stoß term auf der rechten Seite von Gl. (519) verschwindet

$$\begin{aligned}
 (521) \quad & \int d^3v x^\alpha(\vec{v}) \int d^3v_2 \int d^3v_3 \int d^3v_4 W(v, v_2; v_3, v_4) \\
 & \cdot (f_1 f_2 - f_3 f_4) \equiv 0
 \end{aligned}$$

Dies liefert die Erhaltungssätze

Teilchenzahl-
erhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (522)$$

Impuls-
erhaltung

$$\begin{aligned}
 m \frac{\partial}{\partial t} j_e + \frac{\partial}{\partial x_j} \int d^3v m v_j v_e f(\vec{v}, \vec{r}, t) \\
 - F_e(F) n(\vec{r}) = 0
 \end{aligned}$$

(523)

Energieerhaltung:

$\phi_j \equiv v_j - u_j(\vec{r}, t)$ Relativgeschwindigkeit.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3v \frac{m}{2} v^2 f + \frac{\partial}{\partial x_j} \int d^3v (u_j + \phi_j) \frac{m}{2} (u^2 + 2u_j \phi_j + \phi_j^2) f \\ = \vec{j} \cdot \vec{F}$$

(528)

===== ENDE =====