

VI.4 Skalengesetze

Im Folgenden wollen wir wichtige allgemeine Beziehungen zwischen den kritischen Exponenten, Skalengesetze genannt, kennenzulernen

Betrachten: MFT Ising Magnet in der Nähe des kritischen Punktes

$$\text{Gl. (429)} \Rightarrow \frac{b}{k_B T_c} = \tau m + \frac{1}{3} m^3 \quad \tau \equiv \frac{T - T_c}{T_c}$$

$$\text{oder} \quad \frac{1}{k_B T_c} \frac{b}{|\tau|^{3/2}} = \text{sgn}(\tau) \frac{m}{|\tau|^{1/2}} + \frac{1}{3} \left(\frac{m}{|\tau|^{1/2}} \right)^3$$

Auflösen nach m liefert

$$(466) \quad \frac{m(\tau, b)}{|\tau|^{1/2}} = f_{\pm} \left(\frac{b}{|\tau|^{3/2}} \right) \quad \begin{array}{l} \text{"+" } T > T_c \\ \text{"-" } T < T_c \end{array}$$

wobei $f_{\pm}$ die Lösungen der kubischen Gleichung bedeuten

Man erkennt, daß Gl. (466) invariant unter der folgenden Skalentransformation ist

$$(467) \quad b \rightarrow b \lambda^3 \quad \tau \rightarrow \tau \lambda^2 \quad m \rightarrow m \lambda$$

Im Allgemeinen gilt

$$(468) \quad \frac{m(\tau, b)}{|\tau|^\beta} = f_{\pm} \left(\frac{b}{|\tau|^{\beta\delta}} \right)$$

$f_{\pm}$ heißen Skalenfunktionen

denn am krit. Punkt $\bar{\varphi} \sim |\tau|^\beta$ (hier $\bar{\varphi} = m$)
 $b \sim \bar{\varphi}^\delta$

d.h. allgemeine Skalenvarianz

$$(469) \quad \tau \rightarrow \tau \lambda^{\frac{1}{\nu}} \Rightarrow b \rightarrow b \lambda^{\frac{\beta\delta}{\nu}} \quad m \rightarrow m \lambda^{\beta/\nu}$$

Eigenschaften der Skalenfunktion

(470) $m \uparrow b$ für $T < T_c$ $\lim_{y \rightarrow 0} f_{-}(y) = \text{sgn}(y)$

(471) $m(T_c) = 0$ für $b = 0$ $f_{+}(0) = 0$

(472) für $b \neq 0$ m analytisch
 ungleich 0 auch für $\tau \rightarrow 0$ $\lim_{y \rightarrow \infty} f_{\pm}(y) \sim y^{1/\delta}$

$$m = |\tau|^\beta f_{\pm} \left(\frac{b}{|\tau|^{\beta\delta}} \right)$$

Suszeptibilität und kritischer Exponent γ

$$(473) \quad \chi = \left(\frac{\partial m}{\partial b} \right)_T = |\tau|^{B-\delta B} \frac{df_{\pm}(y)}{dy} \Big|_{y = \frac{b}{|\tau|^{B\delta}}$$

für $b \rightarrow 0$ und $\tau \rightarrow 0$

$$\chi \sim |\tau|^{B-\delta B}$$

daraus folgt mit Gl. (447)

(474)

$$\gamma = \beta(\delta - 1)$$

1. Skalengesetz

Bspl: Landau-Ginzburg

$$\beta = \frac{1}{2} \quad \delta = 3 \quad \gamma = 1$$

✓

Spezifische Wärme

freie Energie F

$$dF = -SdT - MdB$$

freie Energie
pro Teilchen $f = \frac{F}{N}$

$$f = f_0 - \int_{b_0}^b db' m(\tau, b')$$

$$f - f_0 = -|\tau|^{B+\delta B} \int_{x_0}^x dx' f_{\pm}(x')$$

Damit

$$C_b = -\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \sim |\tau|^{\beta(1+\delta)-2}$$

mit Gl. (441)

(475)

$$\alpha = 2 - \beta(1 + \delta)$$

2. Skalengesetz

Bspl: London-Ginzburg

$$\beta = \frac{1}{2} \quad \delta = 3 \quad \alpha = 0 \quad \checkmark$$

Weiterhin kann man aus der Hypothese, daß ζ in der Nähe des kritischen Punktes die einzige Längenskala ist zeigen

(476) $\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$2 - \alpha = d\nu$$

d : Raumdimension

Hyperskalenrelation

Bspl: Ginzburg-London

$$\alpha = 0 \quad \nu = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\text{nur korrekt für } d=4!}$$

VI.5 Bemerkungen zum Phasenübergang

1. Ordnung

Phasenübergänge 1. Ordnung können ebenfalls mittels einer phänomenologischen Ginzburg-Landau Theorie beschrieben werden!

Dazu bedarf es eines weiteren Terms im G-L-Funktional

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} = \int d^d x \left[A(\nabla \psi)^2 + a(T - T_c) \psi^2 + u \psi^4 + \frac{1}{2} v \psi^6 - b \psi^2 \right]$$

