

(C) Bemerkung zu Wechselwirkungen

Elektronen sind geladen $\Rightarrow$ Coulomb WW

$$H = \sum_j \frac{\vec{p}_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e^2}{r_{ij}}$$

Effekt?

charakteristische Längenskala $\ell_0 = S_0^{-1/3}$

$$\tilde{p}_i = p_i \ell_0 / \hbar$$

$$\tilde{r}_{ij} = r_{ij} / \ell_0$$

$\Rightarrow$

$$H = \frac{\hbar^2}{\ell_0^2} \left[\sum_j \frac{\tilde{p}_j^2}{2m} + \frac{1}{2 S_0^{1/3}} \hbar^2 \sum_{i \neq j} \frac{e^2}{\tilde{r}_{ij}} \right]$$

D.h. bei großen Dichten $S_0 \Rightarrow |H_{\text{int}}| \ll |H_{\text{kin}}|$

II.4 Ideales Bosegas bei niedrigen Temperaturen

Bosonen: hier $S=0$ O.B.d.A.

Wir haben in Gl. (282)

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{\ell^{3/2}} \quad \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{in } z \end{array}$$

Da für Bosonen $\mu < \varepsilon_{\min} = 0$

$$z = e^{\beta\mu} < 1$$

$$(305) \quad \frac{N}{V} \leq \frac{g_{3/2}(1)}{\lambda^3} = \frac{\zeta(3/2)}{\lambda^3} \approx \frac{2.612}{\lambda^3}$$



$\Rightarrow$ Teilchendichte bei festem T
nach oben beschränkt?!

Für gegebene Teilchendichte $\frac{N}{V}$ gibt es dann einen kritischen Wert für λ

$$\lambda_c^3 \frac{N}{V} = \zeta(3/2) \quad \text{da } \lambda = \lambda(T) \text{ folgt}$$

eine kritische Temperatur

$$(306) \quad k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{\zeta(3/2)} \frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

Solange $T > T_c$ gibt es kein Problem, da dort die Dichte gemäß Gl. (305) durch einen Wert $z < 1$ festgelegt ist. Was passiert bei $T \leq T_c$?

In der Ableitung von (305) hatten wir

$$\sum_{\vec{p}} \longrightarrow \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\vec{p}$$

ersetzt. Ist dies korrekt?

Es war

$$(307) \quad N = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{e^{\beta \epsilon_p} z^{-1} - 1}$$

der
 $\vec{p}=0$ Term
ist problematisch
da bei $z \rightarrow 1$
divergent!

$\Rightarrow$ behandeln $\vec{p}=0$ Term gesondert, d.h.

$$(308) \quad N = N_0 + \underbrace{\sum_{\vec{p} \neq 0} \frac{1}{e^{\beta \epsilon_p} z^{-1} - 1}}$$

Ersetzung durch
Integral unproblematisch
da $e^{\beta \epsilon_p} > 1$

(309)

$$N = N_0 + \frac{g_{3/2}(z)V}{\lambda^3}$$

Teilchen im
Grundzustand

Teilchen in
angeregten Zuständen

• für $z \rightarrow 1$ $N_0 \rightarrow \infty$ $N' = N - N_0$ endlich

Bose-Einstein Kondensation

- Teilchen in angeregten Zuständen:

Es gilt $g_{3/2}(1) = g(3/2) = \lambda^3(T_c) \frac{N}{V}$

und $\lambda^3 \sim \frac{1}{T^{3/2}}$ d.h.

$T > T_c$ $N' = \frac{g_{3/2}(z)}{\lambda^3} V = N \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)} \sim N$

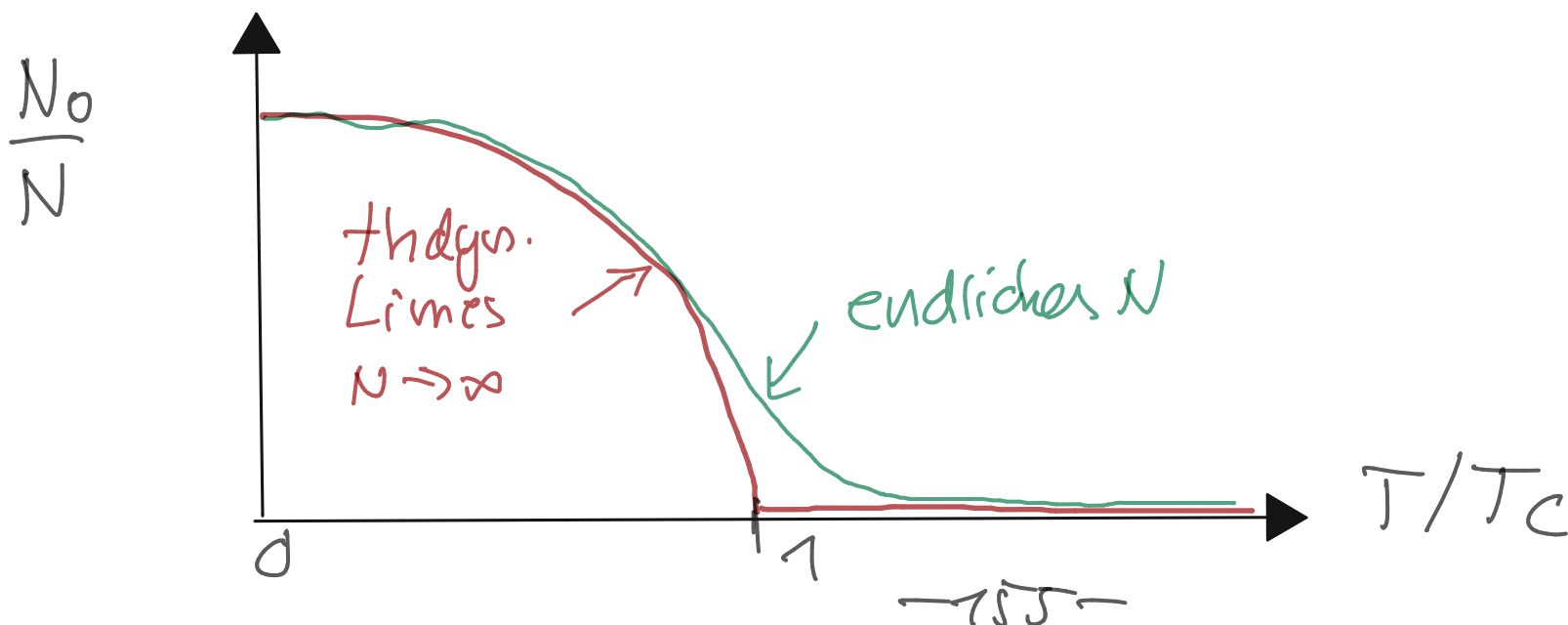
N_0 endlich, d.h. $\frac{N_0}{N} \rightarrow 0$ im therm. Limes

$T \leq T_c$ (310) $N' = N \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$

(311) $N_0 = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right)$ im therm. Limes

Nun ist $N_0 = \frac{1}{z^{-1} - 1}$ da $\epsilon_p = 0$

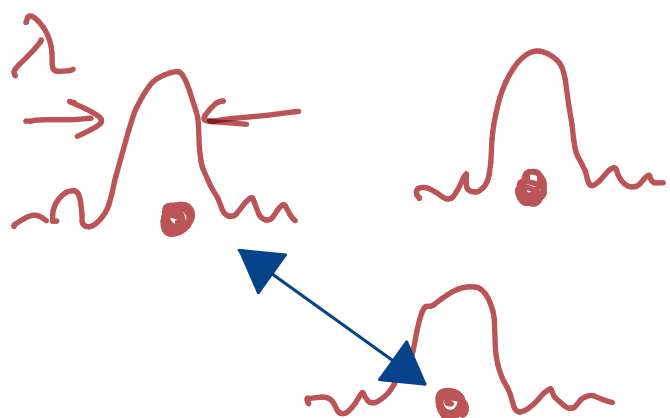
(312) $\Rightarrow z = 1$ für $T < T_c$



► Interpretation

λ = thermische Korrelationslänge
der Wellenfunktion der Bosonen

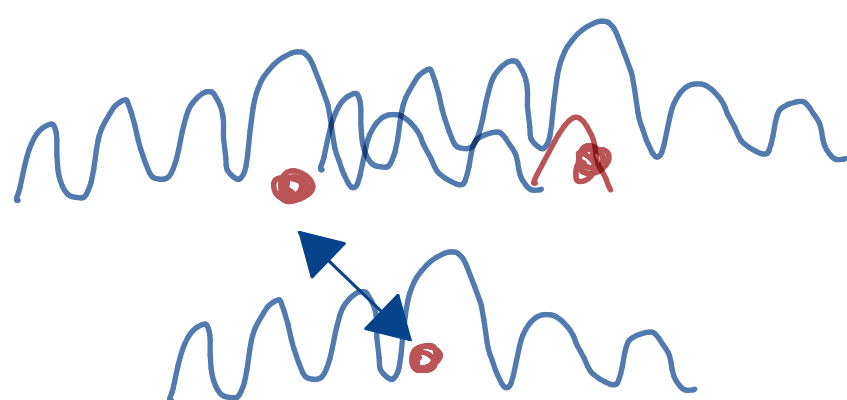
$$T > T_c$$



$$\lambda^3 g < 2.612$$

Abstand der Teilchen
> thermische Läufe
keine Quanteneffekte

$$T < T_c$$



$$\lambda^3 g > 2.612$$

Abstand der Teilchen
≤ thermische Läufe
Quanteneffekte !!

► Müssen wir den $\vec{p}=0$ auch bei der Berechnung
der therm. Potentiale gesondert berücksichtigen?

• Druck

$$p = - \frac{\Phi}{V} = - \frac{1}{\beta V} \sum_{\vec{p}} \ln(1 - ze^{-\beta \epsilon_p})$$

$\xrightarrow{\quad} \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int d^3\vec{p} \quad ??$

was passiert mit $\vec{p}=0$ Term?

• für $\vec{p}=0$: $\frac{1}{V} \ln(1-z)$

mit $N_0 = \frac{z}{1-z} \rightarrow 1-z \sim \frac{1}{N_0} \sim \frac{1}{N}$

d.h. $\frac{1}{V} \ln(1-z) \approx -\frac{1}{V} \ln(\xi V) \quad \xi \sim \frac{N}{V}$

im therm. Limes $V \rightarrow \infty$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln V \rightarrow 0$$

d.h. der Term mit $\vec{p}=0$ trägt nicht im Ausdruck für $p = -\Phi/V$ bei.

Gl. (276) $\Rightarrow$

(313)
$$p = \frac{k_B T}{\lambda^3} g_{5/2}(z)$$

(314)
$$p = \frac{k_B T}{\lambda^3} \begin{cases} \zeta(5/2) \sim T^{5/2} & T < T_c \\ g_{5/2}(z) & T > T_c \end{cases}$$

Druck des idealen Bosegases

wobei $\zeta(5/2) = 7.342$

(315) für $T < T_c$
$$pV \sim T^{5/2}$$

• für $T > T_c$

$$(316) \quad pV = N k_B T \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \xrightarrow{z \rightarrow 0} N k_B T$$

klassisches
Verhalten

• Entropie

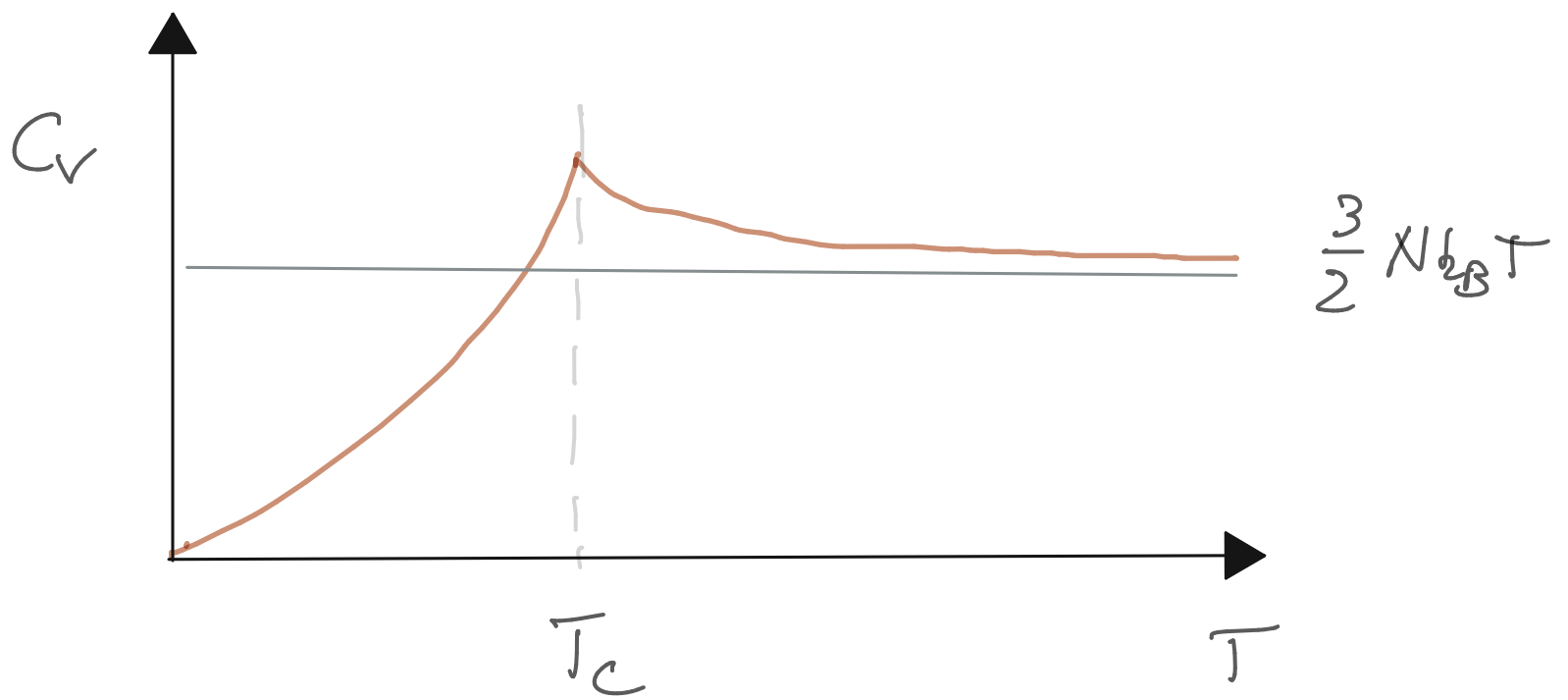
$$S = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{\mu, V}$$

$$(317) \quad S = N k_B \begin{cases} \frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \ln z & T > T_c \\ \frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(\gamma)}{g_{3/2}(\gamma)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} & T < T_c \end{cases}$$

• Wärmekapazität

$$C_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_v$$

$$(318) \quad C_v = N k_B \begin{cases} \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} & T > T_c \\ \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(\gamma)}{g_{3/2}(\gamma)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} & T < T_c \end{cases}$$



$$z \rightarrow 0 \quad \frac{g_{5/2}}{g_{3/2}} = \frac{g_{3/2}}{g_{1/2}} = 1$$

II.5 Das Photonengas

- keine Ruhemasse
- außer bei sehr großen Energien gibt es keine Photon-Photon Wechselwirkung im Vakuum

$\Rightarrow$ ideales Quantengas

$$(319) \quad \varepsilon_{\vec{p}} = \hbar c k = c |\vec{p}| \quad \text{relativistische Energie-Impuls-Relation}$$

Spin $S=1$ aber nur transversale Freiheitsgrade ($\Rightarrow$ QFT)

$$(320) \quad \hat{H} = \sum_{\vec{p}, \lambda=1,2} \varepsilon_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}\lambda} \quad \vec{p} \neq 0$$

(A) Das chemische Potential des Photongases

Photonen haben keine Ruhemasse und keine Ladung

$\Rightarrow$ Zahl der Photonen ist i. A. keine Erhaltungsgröße wenn keine zusätzlichen Einschränkungen vorgegeben werden.

N stellt sich so ein, daß thermodynamische Potentiale maximal werden.

d.h. z.B. $\left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = 0$ Extremum!

(327) $\Rightarrow$ $\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = 0$

$\nexists$ keine Bosekondensation da $z = e^{\beta\mu} = 1$ unabhängig von der Temperatur

Bem: BEC von Licht gekoppelt an Materie (Polaritonen) existiert jedoch

(B) (Groß)kanonische Zustandssumme und Zustandsgleichungen

$$Z = Z_G = \text{Tr} \{ e^{-\beta \hat{H}} \} \quad (\mu=0!)$$

$$= \sum_{\{n_{\vec{p},\lambda}\}} \exp \left\{ -\beta \sum_{\vec{p},\lambda} \varepsilon_{\vec{p}} n_{\vec{p},\lambda} \right\}$$

(322)

$$= \prod_{\substack{\vec{p} \neq 0 \\ \lambda}} \left[\sum_n e^{-\beta \varepsilon_p n} \right]$$

$$= \prod_{\substack{\vec{p} \neq 0 \\ \lambda}} \frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_p}} = \left[\prod_{\vec{p} \neq 0} \frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_p}} \right]^2$$

Mit

$$\overset{\mu=0}{\downarrow} \underline{\Phi} = F = -k_B T \ln Z_G$$

$$(323) \quad F = 2 k_B T \sum_{\vec{p} \neq 0} \ln(1 - e^{-\beta \varepsilon_{\vec{p}}})$$

$$= \frac{2V}{\beta} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi \hbar)^3} \ln(1 - e^{-\beta \varepsilon_{\vec{p}}})$$

$$x = \beta \varepsilon_{\vec{p}} = \beta c p \quad dp = \frac{dx}{\beta c}$$

$$d^3\vec{p} \Rightarrow 4\pi p^2 dp = \frac{4\pi x^2 dx}{(\beta c)^3}$$

$$\overline{F} = \frac{V (k_B T)^4}{\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^\infty dx x^2 \ln(1 - e^{-x})$$

$$\stackrel{\text{part.}}{\underset{\text{Int.}}{=}} - \frac{V (k_B T)^4}{\pi^2 (\hbar c)^3} \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{1}{3} \frac{x^3}{e^x - 1}}_{= 2\zeta(4) = \pi^4/45}$$

$$(324) \quad F = - \frac{V (k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \frac{\pi^2}{45} = - \frac{4}{3} \frac{\sigma}{c} V T^4$$

(325) wobei

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} \hat{=} 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{J}}{\text{s m}^2 \text{K}}$$

Stefan Boltzmann Konstante

(326) Damit

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = \frac{16}{3} \frac{\sigma}{c} V T^3$$

innere Energie

$$U = F + TS$$

(327)

$$U = 4 \frac{\sigma}{c} V T^4$$

kalorische
Zustandsgleichung

Druck

(328)

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \frac{4}{3} \frac{\sigma}{c} T^4$$

thermische
Zustandsgleichung

D.h. im Gegensatz zu nicht relativistischem, idealem Gas gilt hier

(329)

$$U = 3 p V$$

Wärmekapazität

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$$

(330)

$$C_V = 16 \frac{\sigma}{c} V T^3$$

$\xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$

(C) Planck'sche Strahlungsformel

Wir hatten die Bose-Einstein Statistik kennengelernt

$$n_{\vec{p}, \lambda} = \frac{1}{e^{\epsilon_{\vec{p}}/k_B T} - 1}$$

$$\epsilon_{\vec{p}} = \hbar \omega = c |\vec{p}|$$

$$\lambda = 1, 2$$

2 Polarisationen

Gesamtzahl der Zustände in Volumen V

$$(331) \quad \Sigma_{\epsilon} = 2 \int \frac{d^3 \vec{r} d^3 \vec{p}}{(2\pi \hbar)^3} = \frac{8\pi V}{(2\pi \hbar)^3} \int_0^{\infty} dp p^2$$

mit $p = \frac{\epsilon}{c}$

$$(332) \quad \Sigma = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^{\infty} d\epsilon \epsilon^2 = \int_0^{\infty} d\epsilon \rho(\epsilon)$$

Definieren eine Zustandsdichte $\rho(\epsilon) = \frac{V \epsilon^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3}$

mit $\epsilon = \hbar \omega$

$$(333) \quad \boxed{\rho(\omega) = \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3}} \quad \begin{array}{l} \text{Zustandsdichte} \\ \text{des freien} \\ \text{elm. Feldes} \end{array}$$

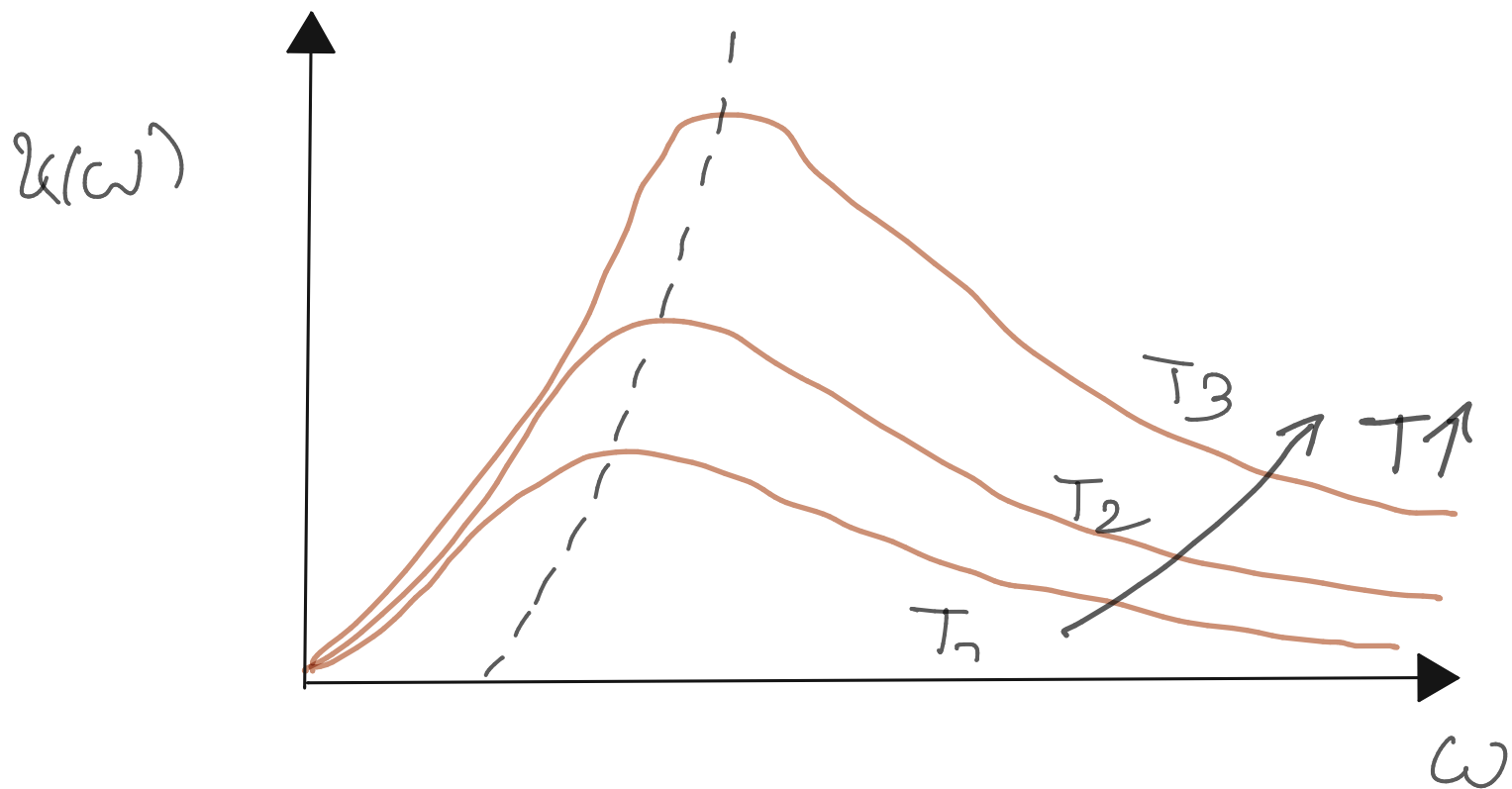
Was ist die Dichte der bei einer Temperatur T besetzten Zustände pro Volumen V

$$n_p \frac{\rho(\omega)}{V} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1}$$

$\Rightarrow$ Energiedichte

$$(334) \quad \boxed{u(\omega) = \hbar \omega n_p \frac{\rho(\omega)}{V} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1}}$$

Planck'sche Strahlungsformel



• $\hbar\omega \ll k_B T$

(335)

$$u(\omega) \approx \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2$$

Rayleigh-Jeans
Strahlungsgesetz

klassisches Strahlungsgesetz

$\Rightarrow$ UV Katastrophe

$u \sim \omega^2 \downarrow$

• $\hbar\omega \gg k_B T$

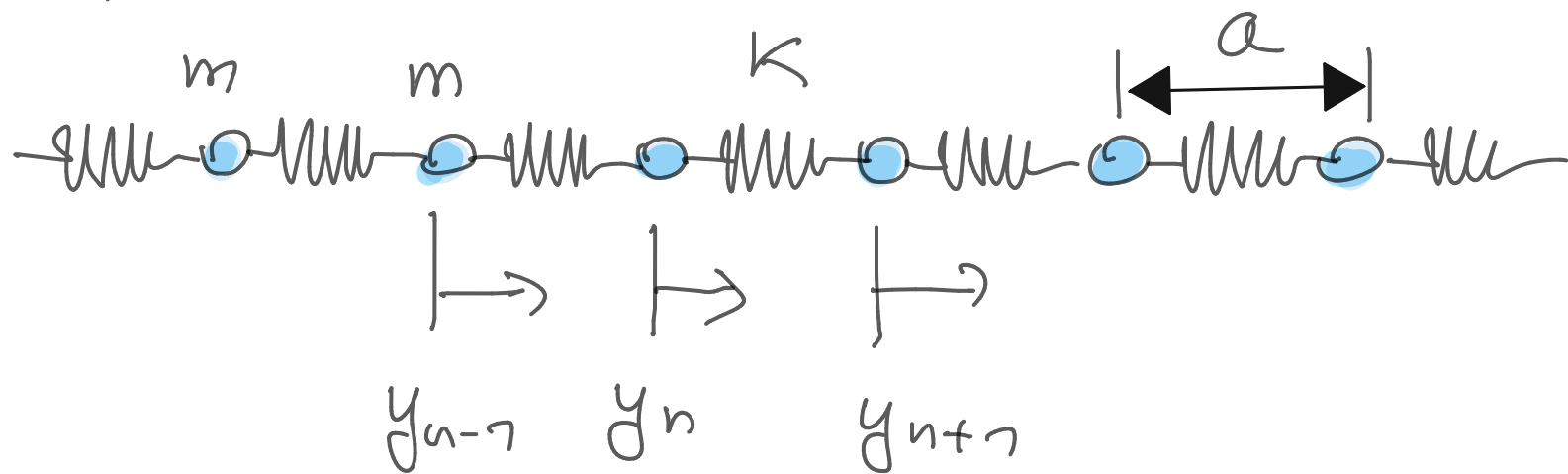
(336)

$$u(\omega) \approx \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega/k_B T}$$

Wien'sches
Gesetz

II.6 Phonongas

Betrachten Gitterschwingungen im Festkörper:
Beispiel: harmonische Kette



Auslenkung aus der Ruhelage x_n^0

$$(337) \quad y_n = x_n - x_n^0 \quad x_{n+1}^0 - x_n^0 = a \quad \text{Gitterkonstante}$$

klassischer Lagrangian

$$(338) \quad L = \sum_n \left(\frac{m}{2} \dot{y}_n^2 - \frac{K}{2} (y_n - y_{n-1})^2 \right)$$

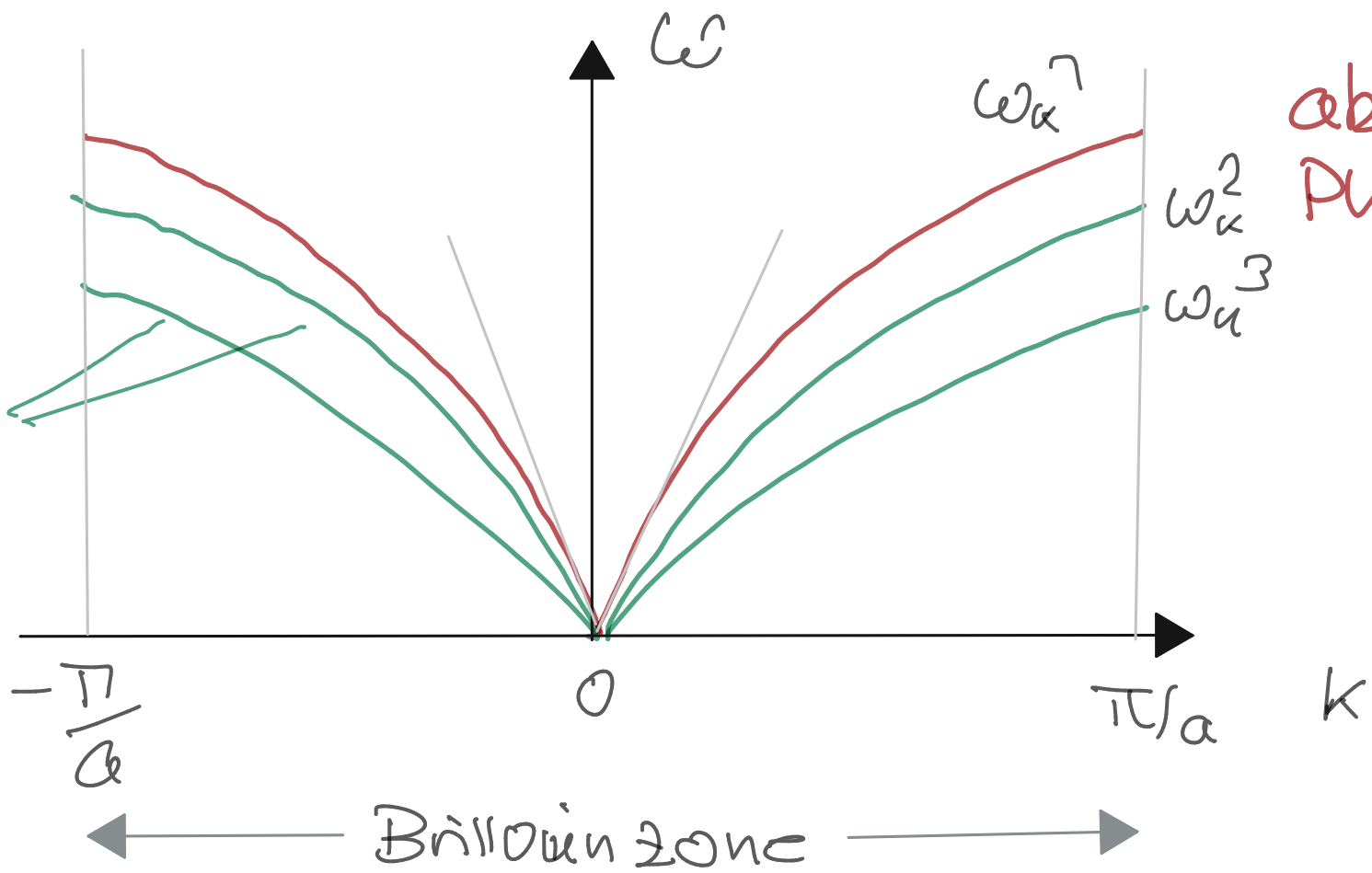
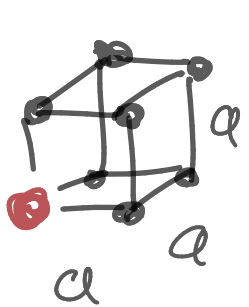
In einer Übungsaufgabe wird gezeigt

$$(339) \quad \hat{H} = \sum_k \hbar \omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Summe harmonischer Oszillatoren

$$(340) \quad \omega_k = 2 \sqrt{\frac{K}{m}} \sin\left(\frac{k a}{2}\right)$$

3D
Kristall



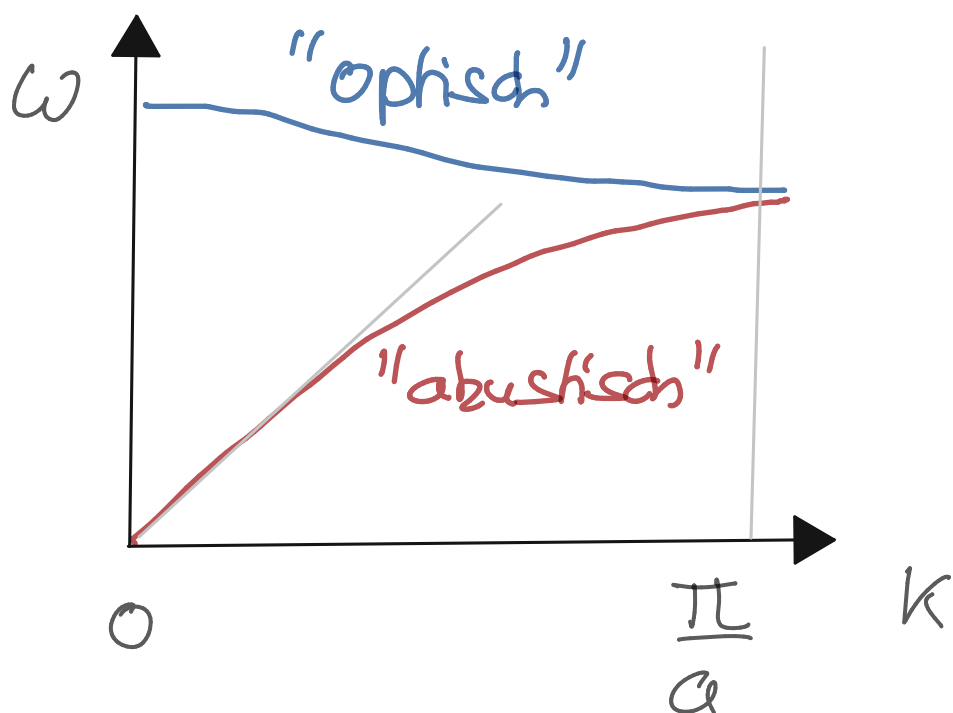
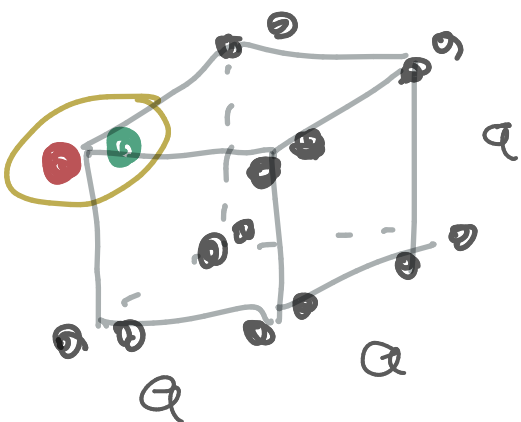
akustische
Phononen

in 3D Kristall mit einem Atom pro Einheitszelle
nur akustische Phononen mit in der Regel
verschiedenen Kraftkonstanten K_1, K_2, K_3

$\Rightarrow$ 3 Eigenmoden $\omega_k^1, \omega_k^2, \omega_k^3$

3D Kristall mit 2 Atomen pro Einheitszelle

$\Rightarrow$ zusätzliche Schwingung zwischen Atomen in
Einheitszelle



Formal analog zu Photonen gas bis auf endliche
Masse $\Rightarrow$ kanonische Zustandssumme

$$(341) \quad F = -k_B T \ln Z = \sum_k \left(\frac{\hbar \omega_k}{2} + k_B T \ln(1 - e^{-\hbar \omega_k / k_B T}) \right)$$

$$(342) \quad U = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right)_V$$

$$(343) \quad U = \frac{1}{2} \sum_k \hbar \omega_k + \sum_k \hbar \omega_k \frac{1}{e^{\hbar \omega_k / k_B T} - 1}$$

Grundzustands-
energie

$$(344) \quad C_V \sim T^3$$

kleine T

$$C_V \approx 3 N k_B$$

hohe T