

II.3 Ideales Fermigas bei niedrigen Temperaturen

(A) Grundzustand bei $T=0$

Nichtwechselwirkende Fermionen im Volumen $V=L^3$

$$\varepsilon = \varepsilon(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

Bei $T=0$ (Grundzustand) sind alle Impuls-zustände

$$\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L} (v_1, v_2, v_3)$$

mit Entartung $(2s+1)$ unterhalb eines Maximalwertes besetzt (mit je einem Teilchen)

Was ist dieser Maximalwert? Es gilt

$$(289) \quad N = (2s+1) \sum_{|\vec{p}| \leq p_F} = \frac{2s+1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\vec{p} \Theta(p_F - p)$$

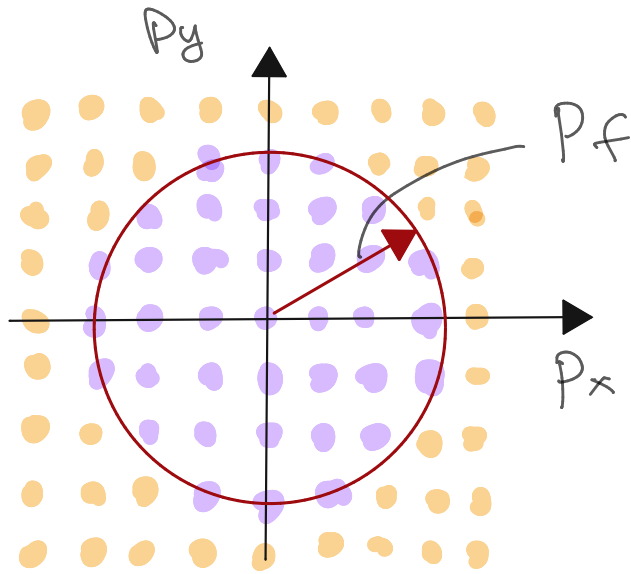
$$N = \frac{(2s+1)}{6\pi^2\hbar^3} V p_F^3$$

p_F maximal besetzter Impuls

Fermiimpuls

(290)

$$p_F = \left(\frac{6\pi^2\hbar^3}{2s+1} \right)^{1/3} \hbar \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$$



$$p_F \sim S^{1/3}$$

Fermienergie

(291)

$$\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \left(\frac{6\pi^2}{2s+1} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

$$\epsilon_F \sim p_F^2 \sim S^{2/3}$$

Gesamtenergie U

$$U = \int_{\epsilon \leq \epsilon_F} dN \frac{p^2}{2m} = \frac{2s+1}{(2\pi\hbar)^3} V \int d^3p \frac{p^2}{2m} \theta(p_F - p)$$

(292)

$$= \frac{(2s+1)V}{20\pi^2\hbar^3 m} p_F^5 = \frac{3}{5} N \epsilon_F$$

(292)

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F$$

innere Energie einer
freien Fermigas
bei $T=0$

d.h.

$$U \sim N^{5/3}$$

Exponent > 1 wg. Pauli-
blocking

Wir hatten gesehen, daß für ideale (Quanten)gase
 stets gilt (Gl. (279))

$$U = \frac{3}{2} pV$$

⇒ Druck des idealen Fermigas

(293)

$$p = \frac{2}{5} \varepsilon_F \frac{N}{V}$$

Fermidruck

Ein ideales Fermigas hat auch
 bei $T=0$ einen endlichen
 Druck!

Das ist ein Quanteneffekt

chemisches Potential bei $T=0$

Nach Gibbs Duhem $\mu = \frac{G}{N} = \frac{U - TS + pV}{N}$

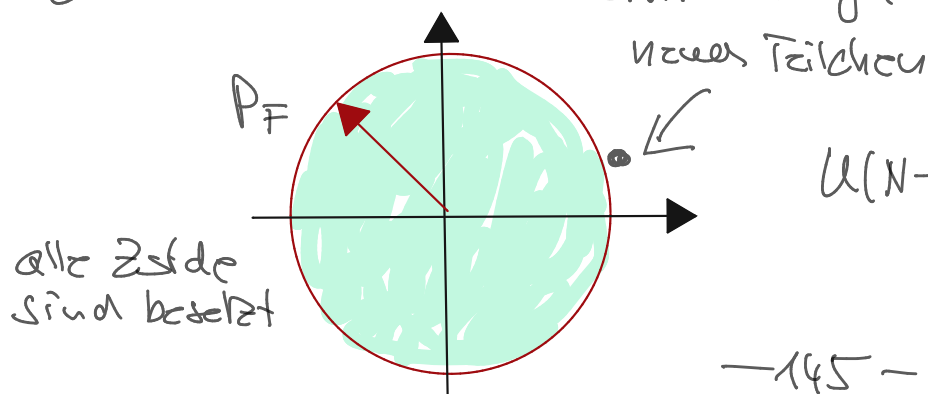
für $T=0$

$$\mu = \frac{U}{N} + \frac{pV}{N} = \frac{3}{5} \varepsilon_F + \frac{2}{5} \varepsilon_F$$

(294)

$$\mu = \varepsilon_F \quad (T=0)$$

D.h. um im Grundzustand ($T=0$) die Teilchenzahl
 eines idealen Fermigas um eins zu erhöhen
 braucht man die Fermienergie



$$U(N+1) - U(N) = \varepsilon_F$$

Fermi-Dirac Verteilung bei $T=0$

$$n(\vec{\epsilon}_p) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1} \xrightarrow[\substack{\beta \rightarrow \infty \\ (T \rightarrow 0)}]{\quad} \begin{cases} 1 & \epsilon_p \leq \mu \\ 0 & \epsilon_p > \mu \end{cases}$$

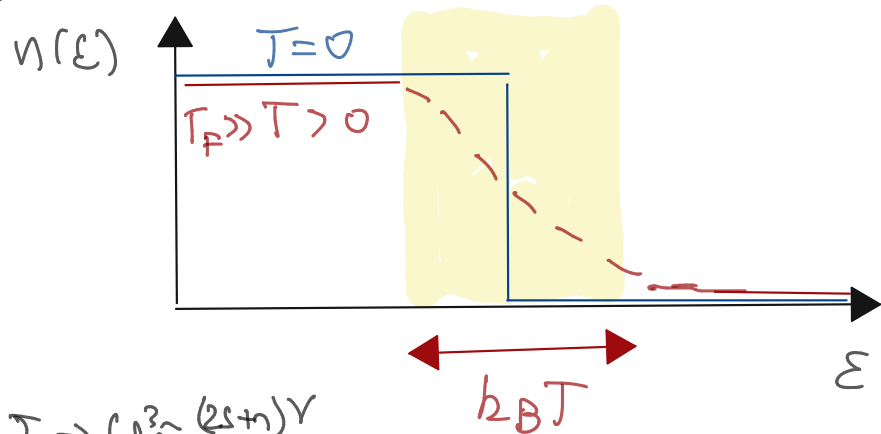
$$(295) \quad n(\vec{\epsilon}_p, T=0) = \Theta(\epsilon_F - \epsilon_{\vec{p}})$$

(B) ideales Fermigas bei kleinen Temperaturen

niedrige Temperaturen $\hat{=}$ $k_B T \ll \epsilon_F = k_B T_F$

$$(296) \quad T_F = \frac{\epsilon_F}{k_B} \quad \text{Fermitemperatur}$$

$$n(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/k_B T} + 1}$$



Es geht nach Gl. 266 $\sum_p \rightarrow \int d^3 \vec{p} \frac{(2s+1)V}{(2\pi\hbar)^3}$

$$\Phi = -k_B T \frac{(2s+1)V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3 \vec{p} \ln(1 + e^{-\beta(\epsilon(\vec{p}) - \mu)})$$

$$= -\frac{(2s+1)V m^{3/2}}{2^{7/2} \pi^2 \hbar^3 \beta} \int_0^\infty d\epsilon \sqrt{\epsilon} \ln(1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)})$$

$$\stackrel{\text{Deta.}}{\underset{\text{Inter.}}{=}} - \frac{(2s+1)V m^{3/2}}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3 \beta} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

D.h. mit (297)

$$(297) \quad \bar{\Phi} = -N \varepsilon_F^{-3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{3/2} n(\varepsilon)$$

Was ist μ ? μ legt N fest, d.h. analog zu (289)

$$\begin{aligned} N &= \frac{(2s+1)V}{2\pi\hbar^3} \int_0^\infty d^3p \, n_p = \frac{(2s+1)V}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dp \, p^2 n_p \\ &= \frac{(2s+1)V m^{3/2}}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \end{aligned}$$

bzw. mit ε_F

$$(298) \quad N = N \frac{3}{2} \varepsilon_F^{-3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{1/2} n(\varepsilon) \rightarrow \text{legt } \mu \text{ fest}$$

In Gl. (297) und (298) tauchen Integrale vom Typ

$$(299) \quad \underline{I} = \int_0^\infty d\varepsilon f(\varepsilon) n(\varepsilon)$$

auff. $\Rightarrow$ näherungsweise Berechnung? 

Wir nutzen dazu eine Rechnung von A. Sommerfeld:

$$I = \int_0^{\mu} d\varepsilon f(\varepsilon) + \int_0^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) \left[n(\varepsilon) - \theta(\mu - \varepsilon) \right]$$

$$\approx \int_0^{\mu} d\varepsilon f(\varepsilon) + \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) \left[\underbrace{n(\varepsilon) - \theta(\mu - \varepsilon)}_{\rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon < 0} \right]$$

Jetzt entwickeln wir $f(\varepsilon)$ um $\varepsilon = \mu$.

Definieren

$$x = (\varepsilon - \mu) / k_B T$$

$$I = \int_0^{\mu} d\varepsilon f(\varepsilon) + \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{e^x + 1} - \theta(-x) \right] *$$

$$(300) \quad * \left[f'(\varepsilon = \mu) (k_B T)^2 x + \frac{1}{3!} f'''(\varepsilon = \mu) (k_B T)^4 x^3 + \dots \right]$$

($\sim x^{2n}$ verschwinden)

$$I = \int_0^{\mu} d\varepsilon f(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 f'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} (k_B T)^4 f'''(\mu) + \dots$$

Anwendung von (300) in (298) liefert

$$1 = \left(\frac{\mu}{\varepsilon_F} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{\mu} \right)^2 + \mathcal{O}(T^4) \right)$$

Auflösen nach μ und iteratives Einsetzen liefert

$$\mu^{(0)} = \varepsilon_F \quad \left(\text{in Ordnungen von } T/T_F \right)$$

$$\mu \approx \mu^{(1)} = \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right)$$

(301)

Zshg. zwischen μ , ε_F und T
"equation of state"

$\Rightarrow$ Zustandsgleichung: $\mu = \mu(N, V, T)$

Anwendung von (300) in (297) liefert

$$\Phi = -N \varepsilon_F^{-3/2} \left(\frac{2}{5} \mu^{5/2} + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{3}{2} \mu^{1/2} + \dots \right)$$

mit μ aus (301)

$$\Phi = -\frac{2}{5} N \varepsilon_F \left(1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right)$$

Das liefert uns die thermische Zustandsgleichung

$$(302) \quad p = -\frac{\Phi}{V} = \frac{2}{5} \frac{N}{V} \varepsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$$

Mit $U = \frac{3}{2} pV$ finden wir die kalorische Zsgl.

$$(303) \quad U = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$$

innere Energie des idealen Fermigases bei $T \ll T_F$

Wärmekapazität

(304)

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = N k_B \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F}$$

Zusammenfassung ideales Fermigas

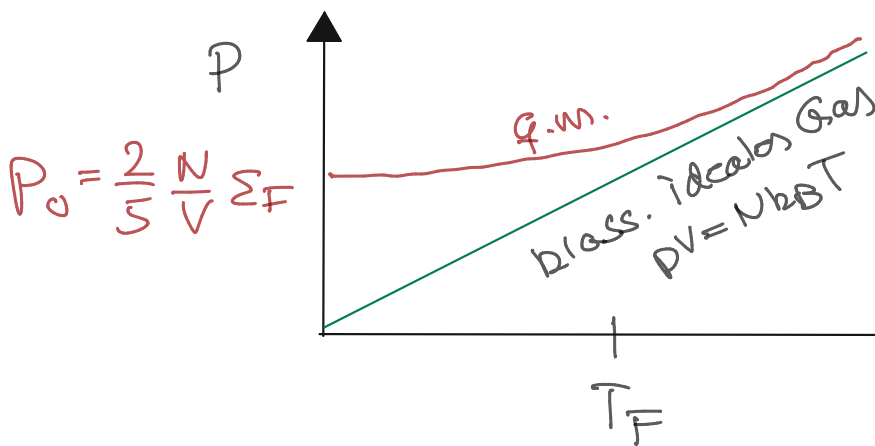
$$p = p(V, T, N)$$

(i) klass. Grenzfall

$$pV = N k_B T \left[1 + \frac{\lambda^3}{2^{5/2} (2s+1)} \frac{N}{V} + \dots \right]$$

(ii) q.m. Grenzfall
 $T \ll T_F$

$$pV = \frac{2}{5} N \varepsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$$



$$\lambda = \frac{1}{k_B T} \sqrt{\frac{2\pi}{m k_B T}}$$

thermische
Länge

$$\mu = \mu(V, T, N)$$

(i) klass. Grenzfall

$$\mu = k_B T \left[\ln \left(\frac{\lambda^3}{(2s+1)} \frac{N}{V} \right) + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\lambda^3}{(2s+1)} \frac{N}{V} + \dots \right]$$

(ii) q.m. Grenzfall
 $T \ll T_F$

$$\mu = \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$$

- $U = U(V, T, N)$

$$U = \frac{3}{2} pV \quad \text{ideales Gas}$$

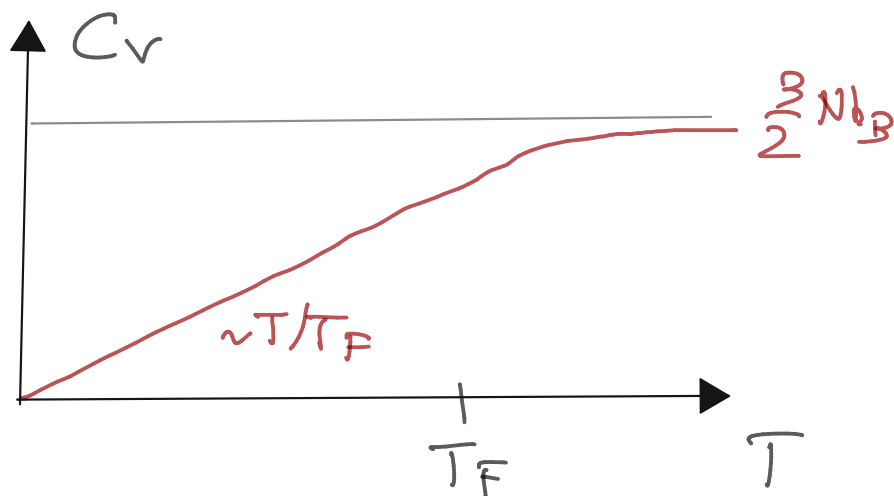
(i) klass. Grenzfall

$$U = \frac{3}{2} N k_B T \left[1 + \frac{\lambda^3}{2^{5/2} (2s+1)} \frac{N}{V} + \dots \right]$$

(ii) q.m. Grenzfall
 $T \ll T_F$

$$U = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$$

Wärmekapazität



- $S = S(V, T, N)$

$$\begin{aligned} TS &= U + pV - \mu N = \frac{5}{2} pV - \mu N \\ &= \frac{5}{3} U - \mu N \end{aligned}$$

(i) klass. Grenzfall

$$S = \frac{5}{2} N k_B - N k_B \ln \left(\frac{\lambda^3}{2^{5/2} (2s+1)} \frac{N}{V} \right)$$

(ii) q.m. Grenzfall
 $T \ll T_F$

$$S = N k_B \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F}$$

(C) Bemerkung zu Wechselwirkungen

Elektronen sind geladen $\Rightarrow$ Coulomb WW

$$H = \sum_j \frac{\vec{p}_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e^2}{r_{ij}}$$

Effekt?

charakteristische Längenskala $\ell_0 = S_0^{-1/3}$

$$\tilde{p}_i = p_i \ell_0 / \hbar$$

$$\tilde{r}_{ij} = r_{ij} / \ell_0$$

$$\Rightarrow H = \frac{\hbar^2}{\ell_0^2} \left[\sum_j \frac{\tilde{p}_j^2}{2m} + \frac{1}{2 S_0^{1/3}} \hbar^2 \sum_{i \neq j} \frac{e^2}{\tilde{r}_{ij}} \right]$$

D.h. bei großen Dichten $S_0 \Rightarrow |H_{\text{int}}| \ll |H_{\text{kin}}|$

II.4 Ideales Bosegas bei niedrigen Temperaturen

Bosonen: hier $S=0$ o.B.d.A.

Wir hatten in Gl. (282)

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z)$$