**Hinweis zur Übungsabgabe:** Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als ein Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

**Aufgabe 1.** *(6 Punkte)*
Ein mechanisches System ist *integrabel*, wenn es genauso viele Erhaltungsgrößen $g_\nu(q,p)$ mit paarweise verschwindenden Poissonklammern, d.h.

$$\{g_\nu(q,p), g_\mu(q,p)\} = 0 \tag{1}$$

gibt, wie das System Freiheitsgrade hat.
Zeigen Sie, dass

**(a)** die Bewegung eines Teilchens in einem konservativen Kraftfeld in 1D

**(b)** die Bewegung eines Teilchens in einem konservativen Zentralkraftfeld in 3D

integrable Probleme sind. Geben Sie jeweils einen unabhängigen Satz von Erhaltungsgrößen mit paarweise verschwindenden Poissonklammern an und zeigen Sie, dass die Größen Erhaltungsgrößen sind.

**Aufgabe 2.** *(6 Punkte)*
Betrachten Sie zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren mit

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(q_1^2 + q_2^2\right) + \frac{1}{2}m\omega_1^2\left(q_1 - q_2\right)^2 \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass

$$g_1 = \frac{1}{4m}\left(p_1 + p_2\right)^2 + \frac{1}{4m}\omega_0^2\left(q_1 + q_2\right)^2 \tag{3}$$

$$g_2 = \frac{1}{4m}\left(p_1 - p_2\right)^2 + \frac{1}{4m}\omega_0^2\left(q_1 - q_2\right)^2 \tag{4}$$

Erhaltungsgrößen sind mit $\{g_1, g_2\} = 0$ und damit das System integrabel ist. Was ist die Interpretation der Erhaltungsgrößen?

**Aufgabe 3.** *(6 Punkte)*
Betrachten Sie ein sphärisches mathematisches Pendel: $R$ sei die Pendellänge, $m$ die Masse, $\theta$ der Auslenkwinkel von der $z$-Achse und $\varphi$ der Azimuthwinkel in der $xy$-Ebene gegen die $x$-Achse. In $z$-Richtung wirkt die Schwerebeschleunigung $g$.

**(a)** Stellen Sie die Hamiltonfunktion auf. Wieviele Freiheitsgrade $f$ hat das System? Zeigen Sie, dass das System integrabel ist indem Sie Integrale der Bewegung $g_j$, $j = 1, ..., f$ mit $\{g_j, g_k\} = 0$ finden.

**(b)** Leiten Sie Bewegungsgleichungen für die Winkel $\theta$ und $\varphi$ her und zeigen Sie, dass deren Lösung aus den Erhaltungsgrößen bis auf nur numerisch lösbare Integrale vollständig bestimmt werden kann.