Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als ein Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

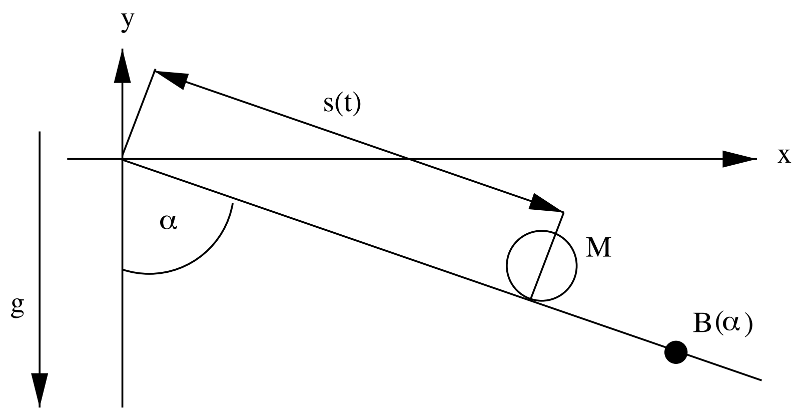
Aufgabe 1. *Schiefe Ebene (6 Punkte)*
Eine Kugel mit homogener Massendichte ρ, Gesamtmasse M und Radius R rollt auf einer schiefen Ebene unter Einwirkung der konstanten Schwerebeschleunigung g abwärts ohne zu gleiten. Die Ebene bildet mit der Vertikalen den Winkel α (siehe Skizze.)

(a) Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment der Kugel bzgl. einer Achse durch den Schwerpunkt $\frac{2}{5}MR^2$ beträgt.

(b) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion $L(s,\dot{s})$ unter Berücksichtigung der Translations-, der Rotations- sowie der potentiellen Energie gegeben ist durch $L(s,\dot{s}) = \frac{7}{10}M\dot{s}^2 + Mgs\cos\alpha$. Beachten Sie dabei die Rollbedingung.

(c) Wie lautet die zugehörige Bewegungsgleichung. Lösen Sie diese für die Anfangsbedingung $s(0) = 0, \dot{s}(0) = 0$.

(d) Nun werde die Kugel bei verschiedenen Winkeln α zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ursprung losgelassen ($s(0) = 0, \dot{s}(0) = 0$). $B(\alpha)$ markiere den Ort in der x,y-Ebene an dem sich die Kugel nach stets derselben Rollzeit T befindet. Zeigen Sie, dass die Gestalt der Kurve auf der die Punkte $B(\alpha)$ liegen ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt bei $x = 0$ und $y = -\frac{5}{28}gT^2$ liegt. Wie groß ist der Radius des Kreises?



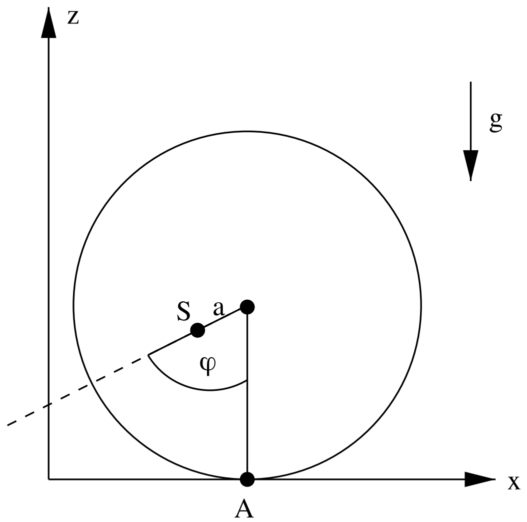
Hinweis:

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$
$$\int \sin^3 x \, dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$$

Bitte wenden!

Aufgabe 2. *Zylinder mit Unwucht (6 Punkte)*
Die Masse M eines *nicht* homogenen zylindrischen Rades mit Radius R ist so verteilt, dass eine der Hauptachse im Abstand a parallel zur Zylinderachse verläuft. Das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse ist Θ_S. Der Zylinder rollt unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer horizontalen Ebene. Die Anfangsbedingunen sind $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$.

Stellen Sie die Lagrangefunktion in der Koordinate φ auf. Wie lautet die dazugehörige Bewegungsgleichung? Geben Sie die Lösung $\varphi_{a=0}(t)$ im Spezialfall $a = 0$ an. Setzen Sie nun $\varphi(t) = \varphi_{a=0}(t) + a\xi(t)$ und entwickeln Sie die Bewegungsgleichung für eine kleine Unwucht a bis zur ersten Ordnung. Berechnen Sie $\xi(t)$. Skizzieren Sie die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$ als Funktion der Zeit.



Aufgabe 3. *Legendre-Transformation (6 Punkte)*
Bestimmen Sie die Legendre-Transformierte

1. $g(u)$ der Funktion $f(x) = \alpha x^2$
2. $g(u)$ der Funktion $f(x) = \alpha(x + \beta)^2$
3. $g(x, v)$ der Funktion $f(x, y) = \alpha x^2 y^3$
4. $g(x, v)$ der Funktion $f(x, y) = \alpha x^3 y^5$

Dabei sind α und β Konstanten. Führen Sie zur Kontrolle die Rücktransformation durch.